Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 13.03.2006

Aufgabe 1: *3 Punkte*

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = 1 - i$$

Lösung :

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\varphi = \arctan(-1) + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$$

$$z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{7}{4}\pi} = \sqrt{2}e^{(\frac{7}{4}\pi+2k\pi)} = \sqrt{2}e^{i\pi\frac{7+8k}{4}} \implies$$

$$z = \sqrt[6]{2}e^{i\pi\frac{7+8k}{12}}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \implies \quad z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i}\pi\frac{7}{12} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\tfrac{7}{12}\pi) + i\sin(\tfrac{7}{12}\pi)\right)$$

$$k = 1 \implies \quad z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i}\pi\frac{15}{12} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\tfrac{15}{12}\pi) + i\sin(\tfrac{15}{12}\pi)\right)$$

$$k = 2 \implies \quad z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i}\pi\frac{23}{12} = \sqrt[6]{2}\left(\cos(\tfrac{23}{12}\pi) + i\sin(\tfrac{23}{12}\pi)\right)$$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 13.03.2006

Aufgabe 2: *3 Punkte*

Man zeige ohne vollständige Induktion: Für jede natürliche Zahl n ist $(2n+1)^2 - 1$ stets durch 8 teilbar.

Lösung :

$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1 = 4n(n+1)$

$n(n+1)$ ist stets durch 2 teilbar $\Longrightarrow$ $4n(n+1)$ ist durch 8 teilbar.

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 13.03.2006

Aufgabe 3: *3 Punkte*

Lösen Sie die Beträge auf und skizzieren Sie die Punktmenge

$$|x-3|+|x+1|<20$$

Lösung :

a) $x \geq 3$

$x-3+x+1<20 \implies 2x-2<20 \implies 2x<22 \implies x<11$

$L_1=(-\infty,11)\cap[3,\infty)=[3,11)$

b) $-1 \leq x < 3$

$3-x+x+1<20$ gilt immer, also auch für $x \in [-1,3) \implies$

$L_2=[-1,3)$

c) $x<-1$

$3-x-x-1<20 \implies -2x+2<20 \implies -18<2x \implies -9<x$

$L_3=(-9,\infty)\cap(-\infty,-1)=(-9,-1)$

d) $L=L_3\cup L_2\cup L_1=(-9,-1)\cup[-1,3)\cup[3,11)=(-9,11)$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 13.03.2006

Aufgabe 4: *3 Punkte*

Gegeben sind die Aussagen

$A:$ 2 ist die kleinste Primzahl

$B:\ 8 > 5$

$C:$ Alle Quadratzahlen n^2 , $n \in \mathbb{N}$ sind gerade

Geben sie die Wahrheitswerte der folgenden Verknüpfungen an:

a) $(A \wedge B) \vee C$

b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

c) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C)$

Lösung :

Es gilt: $(1 \cong$ *wahr* , $0 \cong$ *falsch*$)$

$A = 1$, $B = 1$, $C = 0$

a) $(A \wedge B) \vee C = (1 \wedge 1) \vee 0 = 1$, d.h. a) ist wahr

b) $A \Rightarrow B = \neg A \vee B$,

$Q := (\neg 1 \vee 1) = 0 \vee 1 = 1$

$Q \Rightarrow C = \neg Q \vee C = \neg 1 \vee 0 = 0 \vee 0$, d.h. b) ist falsch

c) $(1 \wedge \neg 1) \vee (1 \wedge 0) = (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$, d.h. c) ist falsch

Aufgabe 5: *3 Punkte*

a) Der Nationaltrainer wählt aus 20 verfügbaren Fussbalspielern 11 Spieler aus, die das nächste Spiel bestreiten. Wieviele Möglichkeiten stehen dem Trainer theoretisch zur Verfügung?

b) Sie haben den Auftrag, aus 9 verschiedenen Bewerbern 3 nacheinander mit Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Lösung :

a) Es gilt $\binom{20}{11} = \dfrac{20!}{11! \cdot (20-11)!}$ Möglichkeiten

$$\frac{20!}{11! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 5 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

b) $\binom{9}{1} = 9$, $\binom{8}{1} = 8$, $\binom{7}{1} = 7$

Es gibt $9 \cdot 8 \cdot 7$ Möglichkeiten

Aufgabe 6: *3 Punkte*

Man beweise die folgende allgemeingültige aussagenlogische Formel

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$$

Lösung :

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee B)$	$(A \wedge \neg B)$	$(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$	$(A \Leftrightarrow B)$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$
0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0
						$\Uparrow$		$\Uparrow$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 13.03.2006

Aufgabe 7: *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Menge $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

bezüglich Matrix-Multiplikation ein Kommutative Gruppe bildet.

Hinweis: $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

1. Die Multiplikation ist für alle α , $\beta \in \mathbb{R}$ ausführbar und $\begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist wieder ein Element der Menge.
2. Die Multiplikation ist kommutativ (Siehe $(*)$)
3. Es existiert Nullelement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Es existiert inverses Element $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. Assoziativität:

   Es gilt:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha+\beta+c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Aufgabe 8: *3 Punkte*

Gegeben sind die Mengen $M = \{-1, 0, 1, 2\}$ und $N = \{-2, 0, 2, 3\}$

a) Bestimmen Sie die Potenzmenge $P(M)$ der Menge M

b) Bestimmen Sie die Elemente der Menge $(M \backslash N) \cap (N \cup M)$

Lösung :

a) $$\mathcal{P}(M) = \Big\{\emptyset\,,\ \{-1\}\,,\ \{0\}\,, \{1\}\,, \{2\}\,,\ \{-1,0\},\ \{-1,1\}\,,\ \{-1,2\}\,,$$
$$\{0,1\}\,, \{0,2\},\ \{1,2\},\ \{-1,0,1\},\ \{-1,0,2\}\,, \{-1,1,2\}\,,$$
$$\{0,1,2\},\ \{-1,0,1,2\}\Big\}$$

b) $M \backslash N = \{-1, 1\}$, $N \cup M = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$(M \backslash N) \cap (N \cup M) = \{-1, 1\}$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06 13.03.2006

Aufgabe 9: *3 Punkte*

Man zeige durch vollständige Induktion

$$n^5 - n \text{ ist für alle } n \in \mathbb{N} \text{ durch 5 teilbar.}$$

Lösung :

Induktion Anfang:

Für $n = 1$ gilt : $1 - 1 = 0$ ist durch 5 teilbar

Induktion Annahme:

Für n gelte : $n^5 - n = 0$ ist durch 5 teilbar

Induktion Behauptung:

Für $(n+1)$ gilt dann : $(n+1)^5 - (n+1) = 0$ ist durch 5 teilbar

Induktion Beweis :

$$\begin{aligned}(n+1)^5 - (n+1) &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - n - 1 \\ &= (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} n^5 - n \text{ ist per Annahme durch 5 teilbar} \\ 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n) \text{ ist auch durch 5 teilbar} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$(n+1)^5 - (n+1)$ ist durch 5 teilbar.

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2005/06   13.03.2006

Aufgabe 10: *3 Punkte*

Für welche Punkte der Gauß'schen Zahlenebene gilt $|z + 4i - 3| = 3$?

Lösung :

$|x + iy + 4i - 3| = 3 \implies \quad |(x - 3) + i(y + 4)| = 3 \implies$

$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 3^2$

Die Punktmenge ist ein Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(3, -4)$