Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006   30.06.2006

Aufgabe 1: *3 Punkte*

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$z^3 = \frac{1}{i}$$

Lösung :

Es gilt : $z^3 = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i+2k\pi} = e^{i\pi\frac{(3+4k)}{2}} \implies$

$z = e^{i\pi\frac{(3+4k)}{6}}$, $k = 0, 1, 2 \implies$

$z_1 = e^{i\pi\frac{3}{6}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$

$z_2 = e^{i\pi\frac{7}{6}} = \cos(\frac{7}{6}\pi) + i\sin(\frac{7}{6}\pi)$

$z_3 = e^{i\pi\frac{11}{6}} = \cos(\frac{11}{6}\pi) + i\sin(\frac{11}{6}\pi)$

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 2: *3 Punkte*

Man zeige ohne vollständige Induktion: Für jede natürliche Zahl n und reelle Zahlen $x \geq 2$ gilt : $x^n - 1 \geq n$

Hinweis : Dividieren Sie $x^n - 1$ durch $x - 1$

Lösung :

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
x^n - 1 &= (x-1) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1) \\
&\geq 1 \cdot (1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 + 1) = n
\end{aligned}
$$

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 3: *3 Punkte*

Lösen Sie die Beträge auf und skizzieren Sie die Punktmenge

$$|10x+1| - |10x-1| < 10$$

Lösung :

a) $x \in \Big[\frac{1}{10}\,,\infty\Big) \implies$

$10x+1-(10x-1) < 10 \implies \quad 2 < 10 \implies$

$L_1 = \Big[\frac{1}{10}\,,\infty\Big) \,\cap\, \mathbb{R} = \Big[\frac{1}{10}\,,\infty\Big)$

b) $x \in \Big[-\frac{1}{10}\,,\frac{1}{10}\Big) \implies$

$10x+1-(-10x+1) < 10 \implies \quad 20x < 10 \implies \quad x < \frac{1}{2} \implies$

$L_2 = \Big[-\frac{1}{10}\,,\frac{1}{10}\Big) \,\cap\, \Big(-\infty\,,\frac{1}{2}\Big) = \Big[-\frac{1}{10}\,,\frac{1}{2}\Big)$

c) $x \in \Big(-\infty\,,-\frac{1}{10}\Big) \implies$

$-10x-1-(-10x-1) < 10 \implies \quad 0 < 10 \implies \quad 0 < 10 \implies$

$L_3 = \Big(-\infty\,,-\frac{1}{10}\Big) \,\cap\, \mathbb{R} = \Big(-\infty\,,-\frac{1}{10}\Big)$

Aus $a)$, $b)$, $c)$ $\implies$

$L = L_3 \,\cup\, L_2 \,\cup\, L_1 \;=\; \Big(-\infty\,,-\frac{1}{10}\Big) \,\cup\, \Big[-\frac{1}{10}\,,\frac{1}{2}\Big] \,\cup\, \Big[\frac{1}{10}\,,\infty\Big] \;=\; \mathbb{R}$

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 4: *3 Punkte*

Gegeben sind die Aussagen

A : Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist ungerade

B : Die Quadratwurzel einer positiven Zahl ist immer positiv

C : Alle Menschen sind sterblich

Geben sie die Wahrheitswerte der folgenden Verknüpfungen an:

a) $(A \vee B) \wedge C$

b) $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow C$

c) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C)$

Lösung :

Es gilt : $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$

a) $(A \vee B) \wedge C = (0 \vee 1) \wedge 1 = 1$, d.h. wahr

b) $$\begin{array}{ccc} (\neg A \vee B) & \Longleftrightarrow & C \\ (1 \vee 1) & \Longleftrightarrow & 1 \ , \end{array}$$ d.h. wahr

c) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0$, d.h. falsch

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 5: *3 Punkte*

a) Ein Direktor möchte aus 10 Ableitungsleiter 2 Stellvertreter wählen.
Wie viele Möglichkeiten hat er?

b) Wie viele Zahlen zwischen 0 bis 999 beinhalten die Ziffer 5 ?
Begründen Sie das.

Lösung :

a) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$

b) Die Zahlen 0 bis 99 beinhalten 19 Zahlen, die eine Ziffer 5 haben :

$50 - 59$ und $5, 15, 25, 35, 45, 65, 75, 85, 95$.

Die Zahlen 0 bis 999 beinhalten :

100 Zahlen $(500 - 599)$ und 9 mal 19 Zahlen,

d.h. $100 + 9 \cdot 19 = 271$ Zahlen

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 6: *3 Punkte*

Man beweise die folgende allgemeingültige aussagenlogische Formel

$$(\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{b}) = (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})$$

Lösung :

Mit $x := (\overline{a} \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{b})$ und $y = (a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{b})$ gilt:

a	b	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \wedge \overline{b}$	$a \wedge \overline{b}$	x	$a \vee \overline{b}$	$\overline{a} \vee \overline{b}$	y
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0

Daraus folgt: $x = y$

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 7: *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{0, 1\}$ bezüglich Modulo 2 Addition und Multiplikation einen Körper bildet.

Lösung :

a) M bildet bezüglich Modulo 2 Addition eine kommutative Gruppe.
Es gilt:

$$(0 + 0) \bmod 2 = 0 \in M \qquad (1)$$

$$(0 + 1) \bmod 2 = 1 \in M \qquad (2)$$

$$(1 + 0) \bmod 2 = 1 \in M \qquad (3)$$

$$(1 + 1) \bmod 2 = 0 \in M \qquad (4)$$

Aus (1) und (2) folgt, dass 0 das Nullelement ist.

Aus (2) und (3) folgt, dass die Modulo 2 Addition kommutativ ist.

Das Nichnullelement 1 hat die Additive Inverse 1.

b) $M \backslash \{0\} = \{1\}$ bildet bezüglich Modulo 2 Multiplikation eine kommutative Gruppe. Es gilt:

$$(1 \cdot 1) \bmod 2 = 1 \in M \qquad (5)$$

Die 1 ist auch das Nullelement und das Inverse-Element.
Ferner ist (5) kommutativ.

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 8: *3 Punkte*

Gegeben sind die Mengen $M = \{4, 6, 8\}$ und $N = \{-2, 0, 2\}$

a) Bestimmen Sie die Potenzmenge $P(M)$ der Menge M

b) Bestimmen Sie die Elemente der Kreuzmenge $M \times N$

Lösung :

a) $P(M) = \Big\{ \emptyset\, ,\ \{4\}\, ,\ \{6\}\, ,\ \{8\}\, ,\ \{4,6\}\, ,\ \{4,8\}\, ,\ \{6,8\}\, ,\ \{4,6,8\} \Big\}$

b) $M \times N = \Big\{ (4,-2)\, ,\ (4,0)\, ,\ (4,2)\, ,\ (6,-2)\, ,\ (6,0)\, ,\ (6,2)\, ,\ (8,-2)\, ,\ (8,0)\, ,\ (8,2) \Big\}$

Klausur Grundlagen der Mathematik SS2006 30.06.2006

Aufgabe 9: *3 Punkte*

Man zeige durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

Lösung :

Induktions-Anfang :

Für $n = 0$ gilt : $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Induktions-Annahme :

Für n gelte : $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$

Induktions-Behauptung :

Für $(n+1)$ gilt dann : $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1 - \frac{1}{n+3}$

Induktions-Beweis :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&\overset{(I.A.)}{=} 1 - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+3}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+2} \cdot \frac{n+2}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10: *3 Punkte*

Für welche Punkte der Gauß'schen Zahlenebene gilt $(z+i)(\overline{z}-i)=9$?

Lösung :

$(z+i)\cdot(\overline{z}-i)=9 \implies$

$(x+i(y+1))\cdot(x-i(y+1))=9 \implies$

$x^2+(y+1)^2=3^2$

Die Punktmense ist ein Kreis mit Zentrum $(0,-1)$ und Radius 3.