Klausur Grundlagen der Mathematik WS2006/07 04.10.2006

Aufgabe 1: *3 Punkte*

Man zeige durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+7)(k+8)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{n+8}$$

Lösung:

Induktions-Anfang:

Für $n = 0$ gilt : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{(k+7)(k+8)} = \frac{1}{7 \cdot 8} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$

Induktions-Annahme:

Für n gelte : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+7)(k+8)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{n+8}$

Induktions-Behauptung:

Für $(n+1)$ gilt dann : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+7)(k+8)} = \frac{1}{7} - \frac{1}{n+9}$

Induktions-Beweis:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+7)(k+8)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+7)(k+8)} + \frac{1}{(n+8)(n+9)} \\
&\overset{(I.A.)}{=} \frac{1}{7} - \frac{1}{n+8} + \frac{1}{(n+8)(n+9)} \\
&= \frac{1}{7} - \frac{1}{n+8}\left(1 - \frac{1}{(n+9)}\right) \\
&= \frac{1}{7} - \frac{1}{(n+8)} \cdot \frac{n+8}{(n+9)} \\
&= \frac{1}{7} - \frac{1}{n+9}
\end{aligned}$$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2006/07 04.10.2006

Aufgabe 2: *3 Punkte*

Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$z^3 - 4z^2 + z - 4$$

Hinweis: Eine Nullstelle raten.

Lösung:

Für $z = 4$ gilt $4^3 - 4 \cdot 4^2 + 4 - 4 = 0$, d.h. $z_1 = 4$

Division mit Horner-Schema (Nicht Bedingung)

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 1 & -4 \\ \hline 4 & & 4 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Es gilt : $z^3 - 4z^2 + z - 4 = (z - 4) \cdot (z^2 + 1)$

$z^2 + 1 = 0 \implies z_{2,3} = \pm i$

Aufgabe 3: *3 Punkte*

Die natürlichen Zahlen $a > 1$ und $b > 1$ stehen in Relation wenn gilt: $ggT(a,b) \geq 2$. Ist diese Relation

a) Reflexiv ?

b) Symmetrisch ?

c) Transitiv ?

Begründen Sie das. Für den Fall, dass eine der Eigenschaften a) bis c) nicht gilt, geben Sie ein Beispiel an.

Lösung:

a) Ja, denn es gilt $ggT(a,a) = a \geq 2$

b) Ja, denn es gilt $ggT(a,b) = ggT(b,a)$

c) Nein, denn für $a = 2$, $b = 6$ und $c = 9$ gilt
$ggT(a,b) = ggT(2,6) = 2 \geq 2$, $ggT(b,c) = ggT(6,9) = 3 > 2$
aber $ggT(a,c) = ggT(2,9) = 1$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2006/07 04.10.2006

Aufgabe 4: *3 Punkte*

Lösen Sie die Beträge auf und skizzieren Sie die Punktmenge auf der Zahlengerade

$$|x-3| + |1-x| \ \leq \ 10$$

Lösung:

a) $x \in (-\infty, 1]$

$-x+3+1-x \leq 10 \implies \quad -2x \leq 6 \implies \quad x \geq -3$

$L_1 = (-\infty, 1] \ \cap \ [-3, \infty) = [-3, 1]$

b) $x \in (1, 3)$

$x-3-1+x \leq 10 \implies \quad 2 \leq 10 \implies \quad x \in \mathbb{R}$

$L_2 = (1, 3) \ \cap \ \mathbb{R} = (1, 3)$

c) $x \in [3, \infty)$

$x-3-1+x \leq 10 \implies \quad 2x \leq 14 \implies \quad x \leq 7$

$L_3 = [3, \infty) \ \cap \ (-\infty, 7] = [3, 7]$

d) Aus a) bis c) folgt:

$L = L_1 \ \cup \ L_2 \ \cup \ L_3 = [-3, 1] \ \cup \ (1, 3) \ \cup \ [3, 7] = [-3, 7]$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2006/07 04.10.2006

Aufgabe 5: *3 Punkte*

Gegeben sind die Aussagen

A : Die Summe von zwei ungeraden Zahlen ist gerade

B : Die 3.te Wurzel $\sqrt[3]{a}$ einer positiven Zahl $a \in \mathbb{R}^+$ ist positiv

C : Alle Menschen sind verheiratet

Geben sie die Wahrheitswerte der folgenden Verknüpfungen an:

a) $(A \vee B) \wedge C$

b) $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow C$

c) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C)$

Lösung:

$A = 1\,, \quad B = 1\,, \quad C = 0$

a) $(A \vee B) \wedge C = (1 \vee 1) \wedge 0 = 1 \wedge 0 = 0$, d.h. a) ist falsch

b) $(\neg A \vee B) \Leftrightarrow C$, d.h. $(0 \vee 1) \Leftrightarrow 0$, also $1 \Leftrightarrow 0$, d.h. b) ist falsch

c) $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C) = (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0 \wedge 0 = 0$, d.h. c) ist falsch

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2006/07   04.10.2006

Aufgabe 6: *3 Punkte*

a) Wie viele nicht negative ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung
$x + y + z = 10$?

b) Wie viele 3 stellige Zahlen beinhalten die Ziffer 9 ?
Begründen Sie das.

Lösung zu a)

Mit $w = x + y \implies$

$$w + z = 10 \implies \left.\begin{array}{ccccc} 0 & + & 10 & = & 10 \\ 1 & + & 9 & = & 10 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 10 & + & 0 & = & 10 \end{array}\right\} \text{ 11 Lösungen}$$

Die Gleichung $w = x + y = k$ hat $(k + 1)$ Lösungen.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & + & k & = & k \\ 1 & + & (k-1) & = & k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k & + & 0 & = & k \end{array}$$

Die Anzahl N alle Lösungen ist dann:

$$N = \sum_{k=1}^{11} k = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$

Lösung zu b)

1. Lösung :

Von 900 bis 999 sind es 100 Zahlen, die die Ziffer 9 beinhalten.
Von 00 bis 99 sind es 19 Zahlen, die die Ziffer 9 beinhalten, nämlich
09 , 19 , 29 , 39 , 49 , 59 , 69 , 79 , 89 , $90 - 99$.

Insgesamt sind es also $9 \cdot 19 + 100 = 171 + 100 = 271$ Zahlen.

2. Lösung :

9 Stück von der Ziffern $0 - 9$ haben keine 9 . Daraus folgt:
Es gibt $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ Zahlen, die keine 9 enthalten. Dann enthalten die restlichen $1000 - 729 = 271$ Zahlen mindestens eine 9 .

Aufgabe 7: *3 Punkte*

Geben Sie eine konjunktive und disjunktive Normalform der folgenden Funktion an.

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Lösung:

a) Konjunktive Normalform

$\neg x \vee y$

b) Disjunktive Normalform

$(\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge y)$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2006/07 04.10.2006

Aufgabe 8: *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{0, 1, 2\}$ bezüglich Modulo 3 Addition eine kommutative Gruppe bildet.

Lösung:

Die Assoziaticität und Kommunikativität für Addition folgt aus der Eigenschaften der natürlichen Zahlen. Ferner gilt:

a) Abgeschlossenheit

$(0+0) \bmod 3 = 0 \in M$ $\qquad$ $(1+2) \bmod 3 = 0 \in M$

$(0+1) \bmod 3 = 1 \in M$ $\qquad$ $(2+2) \bmod 3 = 0 \in M$

$(0+2) \bmod 3 = 2 \in M$

b) 0 ist das Neutrale-Element der Addition.

$(0+n) \bmod 3 = n \ , \quad n = 0, 1, 2$ nach Teil a)

c) Inverses Element

$(0+0) \bmod 3 = 0 \ , \quad (1+2) \bmod 3 = 0 \ , \quad (2+1) \bmod 3 = 0$

Aufgabe 9: *3 Punkte*

Gegeben sind die Mengen $M = \{1, 6, 9\}$ und $N = \{-3, 0, 3\}$

a) Bestimmen Sie die Potenzmenge $P(M)$ der Menge M

b) Bestimmen Sie die Elemente der Kreuzmenge $M \times N$

Lösung:

a) $P(M) = \Big\{\emptyset\ ,\ \{1\}\ ,\ \{6\}\ ,\ \{9\}\ ,\ \{1,6\}\ ,\ \{1,9\}\ ,\ \{6,9\}\ ,\ \{1,6,9\}\Big\}$

b)
$$\begin{aligned}\{1,6,9\} \times \{3,0,3\} = \Big\{&(1,-3)\ ,\ (1,0)\ ,\ (1,-3)\ ,\\ &(6,-3)\ ,\ (6,0)\ ,\ (6,-3)\ ,\\ &(9,-3)\ ,\ (9,0)\ ,\ (9,-3)\Big\}\end{aligned}$$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS2006/07 04.10.2006

Aufgabe 10: *3 Punkte*

Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schemas den Wert des Polynoms

$$p(x) = 4x^4 - 6x^3 + 2x^2 - x + 13$$

an der Stelle $x = 2$ und geben Sie $p(x)$ in der Form

$$p(x) = q(x) \cdot (x - 2) + p(2)$$

an.

Lösung:

	4	-6	2	-1	13
2		8	4	12	22
	4	2	6	11	35

$$p(x) = (4x^3 - 2x^2 + 6x + 11)(x - 2) + 35$$