Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 1: *3 Punkte*

Man zeige durch vollständige Induktion :

$$(4 \cdot 7^n - 1) \text{ ist durch 3 teilbar }, \quad n \geq 0 .$$

Lösung :

Induktions-Anfang :

Für $n = 0$ gilt : $4 \cdot 1 - 1 = 3$ ist durch 3 teilbar.

Induktions-Annahme :

Für n gelte : $4 \cdot 7^n - 1 = 3$ sei durch 3 teilbar.

Induktions-Behauptung :

Für $(n+1)$ gilt dann : $4 \cdot 7^{n+1} - 1 = 3$ ist durch 3 teilbar.

Induktions-Beweis :

$$\begin{aligned}
4 \cdot 7^{n+1} - 1 &= 4 \cdot 7^{n+1} - 1 - (4 \cdot 7^n - 1) + (4 \cdot 7^n - 1) \\
&= 4 \cdot 7^{n+1} - 4 \cdot 7^n + (4 \cdot 7^n - 1) \\
&= 4 \cdot 7^n(7 - 1) + (4 \cdot 7^n - 1) \\
&= 4 \cdot 7^n \cdot 6 + (4 \cdot 7^n - 1)
\end{aligned}$$

$4 \cdot 7^n - 1$ ist per Annahme durch 3 teilbar und 6 ist auch durch 3 teilbar,
so ist auch $4 \cdot 7^{n+1} - 1$ durch 3 teilbar.

Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 2: *3 Punkte*

Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung und skizzieren Sie sie in der komplexen Ebene.

$$z^3 = i$$

Hinweis: $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lösung :

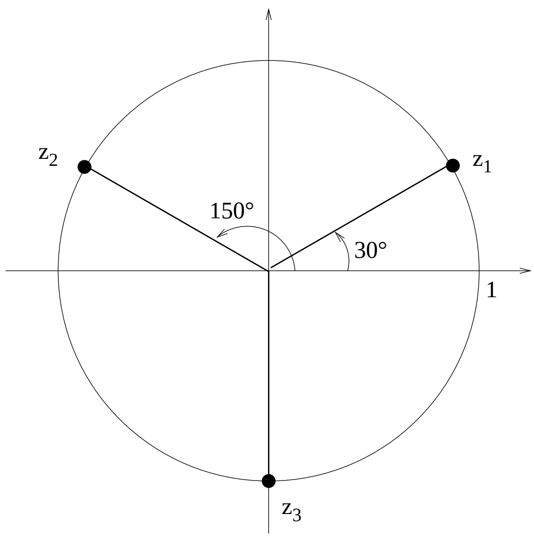
Es gilt $\quad i = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{i\cdot(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = e^{i\cdot\pi\cdot\frac{1+4k}{2}} \implies$

$z = e^{i\cdot\pi\cdot\frac{1+4k}{6}}\ , \quad k = 0, 1, 2 \implies$

$$z_1 = e^{i\cdot\frac{\pi}{6}} = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\cdot\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$$

$$z_2 = e^{i\cdot\pi\cdot\frac{5}{6}} = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i\cdot\sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$$

$$z_3 = e^{i\cdot\pi\cdot\frac{9}{6}} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i\cdot\sin(\frac{3\pi}{6}) = -i$$



Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 3: *3 Punkte*

Geben Sie eine konjunktive und eine disjunktive Normalform von α an.

A	B	f
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Lösung :

a) Konjuktive Form

$A \vee \overline{B}$

b) Disjunktive Form

$(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (A \wedge B)$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 4: *3 Punkte*

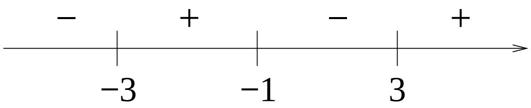
Lösen Sie den Betrag auf und berechnen Sie die Lösungsmenge

$$|x-1| \;>\; \frac{8}{x+1}$$

Lösung :

a) $x \geq 1 \implies \quad x-1 > \dfrac{8}{x+1} \implies \quad (x-1)(x+1)^2 \;>\; 8(x+1) \implies$

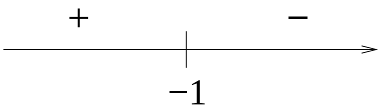
$$\begin{aligned}
(x-1)(x+1)^2 - 8(x+1) \;&>\; 0 \implies \\
(x+1)\Big[(x-1)(x+1) - 8\Big] \;&>\; 0 \implies \\
(x+1)(x^2-1-8) \;&>\; 0 \implies \\
(x+1)(x^2-9) \;&>\; 0 \implies \\
(x+1)(x-3)(x+3) \;&>\; 0
\end{aligned}$$



$L_1 \;=\; (1,\infty) \;\cap\; [(-3,-1) \;\cup\; (3,8)] \;=\; (3,8)$

b) $x < 1 \implies \quad -(x-1) > \dfrac{8}{x+1} \implies \quad -(x-1)(x+1)^2 \;>\; 8(x+1) \implies$

$$\begin{aligned}
(x-1)\Big[-(x-1)(x+1) - 8\Big] \;&>\; 0 \implies \\
(x+1)\Big[-(x^2-1) - 8\Big] \;&>\; 0 \implies \\
(x+1)(-x^2+1-8) \;&>\; 0 \implies \\
-(x+1)(x^2+7) \;&>\; 0
\end{aligned}$$



$L_2 \;=\; (-\infty,1) \;\cap\; (-\infty,-1) \;=\; (-\infty,-1)$

c) $\quad L = L_1 \;\cup\; L_2 \;=\; (-\infty,-1) \;\cup\; (3,\infty)$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 5: *3 Punkte*

Sei $M = \{z \in \mathbb{Z}$ mit $z = n + m * i\ ,\ n, m \in \mathbb{N}_0\}$ und folgende Relation auf M gegeben:

$z_1 \backsim z_2 \Leftrightarrow n_1 + m_1 = n_2 + m_2$ für $z_1 = n_1 + m_1 * i\ ,\ z_2 = n_2 + m_2 * i$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt und zeichnen Sie einige Äquivalenzklassen in die Gauß'sche Zahlenebene ein.

Lösung :

a) Reflexivität

$z \sim z$, denn es gilt $n + m = n + m$

b) Kommutativität

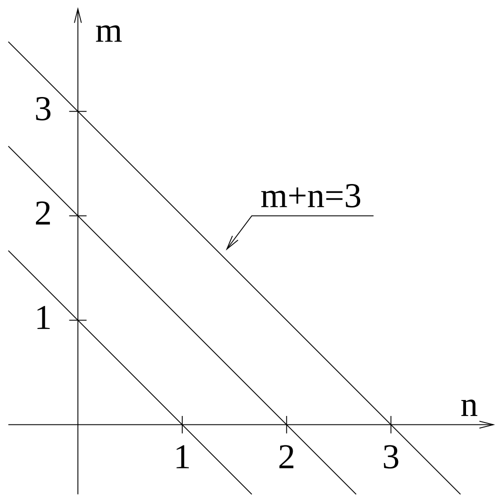
Aus $z_1 \sim z_2$, d.h. $n_1 + m_1 = n_2 + m_2$

folgt $z_2 \sim z_1$, weil $n_2 + m_2 = n_1 + m_1$ gilt.

c) Aus $z_1 \sim z_2$ und $z_2 \sim z_3 \Longrightarrow z_1 \sim z_3$

Beweis :

$$\left.\begin{array}{ll} z_1 \sim z_2 & \text{d.h. } n_1 + m_1 = n_2 + m_2 \\ z_2 \sim z_3 & \text{d.h. } n_2 + m_2 = n_3 + m_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow n_1 + m_1 = n_3 + m_3 \text{ d.h. } z_1 \sim z_3$$



Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 6: *3 Punkte*

a) Wieviele Tanzpaare kann man aus 10 Männern und 8 Frauen bilden?

b) Wieviele Tanzpaar-Mannschaften aus 8-Paare kann man aus 10 Männern und 8 Frauen bilden?

Lösung :

a) $10 \times 8 = 80$ Paare

b) $\binom{10}{8} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ Manschaften

Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 7: *3 Punkte*

Man beweise die folgende Tautologie

$$\underbrace{\neg A \vee B}_{L} = \underbrace{(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)}_{R}$$

Lösung :

A	B	$\neg A$	$\neg B$	L	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \vee \ B$	$A \wedge B$	R
0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1

Daraus folgt : $L = R$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 8: *3 Punkte*

Zeigen Sie, dass die Menge $M = \{2^k |\ k \in \mathbb{Z}\}$ bezüglich Multiplikation eine kommutative Gruppe bildet.

Lösung :

a) Aus 2^k , $2^\ell \in M \implies 2^k \cdot 2^\ell = 2^{k+\ell} \in M$

b) Für $1 = 2^0$ gilt $2^k \cdot 2^0 = 2^k \quad \forall\, 2^k \in M$

c) $\forall\, 2^k \in M \quad \exists\, 2^{-k} \in M$ mit $2^k \cdot 2^{-k} = 2^{k-k} = 2^0 = 1$

d) $2^k \cdot 2^\ell = 2^{k+\ell} = 2^{\ell+k} = 2^\ell \cdot 2^k$ (Kommutativität)

Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 9: *3 Punkte*

Gegeben sind die Mengen $M = \{1, 3, 5, 7\}$ und $N = \{2, 4, 7\}$

a) Berechnen Sie $(M \backslash N) \cup (N \backslash M)$

b) Bestimmen Sie die Potenzmenge $P(M)$ der Menge M

c) Bestimmen Sie die Elemente der Kreuzmenge $M \times N$

Lösung :

a) $M \backslash N = \{1, 3, 5\}$

$N \backslash M = \{2, 4\}$

$(M \backslash N) \cup (N \backslash M) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $$P(M) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{1,3\}, \{1,5\}, \{1,7\}, \{3,5\}, \{3,7\}, \{5,7\}, \{1,3,5\}, \{3,5,7\}, \{1,5,7\}, \{1,3,7\}, \{1,3,5,7\}\Big\}$$

c) $$M \times N = \Big\{(1,2), (1,4), (1,7), (3,2), (3,4), (3,7), (5,2), (5,4), (5,7), (7,2), (7,4), (7,7)\Big\}$$

Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2006/07, 14.03.2007

Aufgabe 10: *3 Punkte*

Für welche Punkte der Gauß'schen Zahlenebene gilt :

$$5 * (Im(z))^2 + z^2 \leq 16 + 2 * Re(z) * Im(z) * i$$

Lösung :

$5y^2 + (x + i \cdot y)^2 \ \leq \ 16 + 2xy \cdot i \ \Longrightarrow$

$5y^2 + x^2 - y^2 + 2xy \cdot i \ \leq \ 16 + 2xy \cdot i \ \Longrightarrow$

$x^2 + 4y^2 \ \leq \ 16 \ \Longrightarrow$

$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} \ \leq \ 1$

Die Punktmenge ist das innere (inklusive Rand) einer Ellipse mit Zentrum $(0, 0)$ und den Halbachsen 4 und 2.