Klausur Grundlagen der Mathematik WS 2009/10, 17.03.2010

Prof. P. Jansen , Dipl.Math. P. Mayiopoulos

Aufgabe 1: *10 Punkte*

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $n^3 + 2n$ für alle natürlichen Zahlen n durch 3 teilbar ist.

Lösung 1:

Induktions-Anfang:

Für $n = 1$ ist 1+2=3 durch 3 teilbar

Induktions-Annahme:

Für $\underline{\text{ein } n \geq 1}$ sei $(n^3 + 2n)$ durch 3 teilbar

Induktions-Behauptung:

Für $(n + 1)$ ist dann $[(n + 1)^3 + 2(n + 1)]$ durch 3 teilbar

Induktions-Beweis:

$$\begin{aligned}(n + 1)^3 + 2(n + 1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2\\ &= (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

ist durch 3 teilbar, weil $(n^3 + 2n)$ per Induktions-Annahme durch 3 teilbar ist und $3(n^2 + n + 1)$ auch durch 3 teilbar ist.

Induktions-Beweis:

$$(n + 1)^3 + 2(n + 1) - (n^3 + 2n) + (n^3 + 2n)$$
$$= (n + 1)^3 - n^3 + 2 + (n^3 + 2n) = 3n^2 + 3n + 1 + 2 + (n^3 + 2n)$$
$$= 3(n^2 + n + 1) + (n^3 + 2n)$$

ist durch 3 teilbar, und $(n^3 + 2n)$ per Induktions-Annahme durch 3 teilbar ist und $3(n^2 + n + 1)$ durch 3 teilbar ist.

Damit ist bewiesen, dass $n^3 + 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 2: *10 Punkte*

P sei die Menge der Primzahlen kleiner 10 und G sei die Menge der geraden, einstelligen Zahlen. Bilden Sie in aufzählender Form (Elemente angeben)

a) die Vereinigung $P \cup G$

b) den Durchschnitt $P \cap G$

c) die Differenz $G \setminus P$

d) das kartesische Produkt $P \times G$

e) die symmetrische Differenz $(G \setminus P) \cup (P \setminus G)$

der beiden Mengen.

Lösung 2:

$P = \{2, 3, 5, 7\} \quad , \quad G = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

a) $P \cup G = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

b) $P \cap G = \{2\}$

c) $G \setminus P = \{0, 4, 6, 8\}$

d) $$\begin{aligned} P \times G = \{&(2,0),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8)\\ &(3,0),(3,2),(3,4),(3,6),(3,8)\\ &(5,0),(5,2),(5,4),(5,6),(5,8)\\ &(7,0),(7,2),(7,4),(7,6),(7,8)\} \end{aligned}$$

e) $G \setminus P = \{0, 4, 6, 8\} \quad , \quad P \setminus G = \{3, 5, 7\}$
$(G \setminus P) \cup (P \setminus G) = \{0, 3, 4, 6, 7, 8\}$

Aufgabe 3: *10 Punkte*

Berechnen Sie ohne vorher zu multiplizieren oder zu addieren

a) 1) $(365 \cdot 55) \bmod 7$

   2) $(6 + 13) \bmod 7$

b) Wenden Sie die Ergebnisse aus a) und b) an, um zu berechnen, welcher Wochentag der 1.Januar 1955 war.

Hinweis: Der 01.01.1900 war ein Montag und das Jahr 1900 kein Schaltjahr.
Schaltjahre: 1904, 1908, 1912, 1916,...

Lösung 3:

a) 1) $$(365 \cdot 55) \bmod 7 = ((365 \bmod 7)(55 \bmod 7)) \bmod 7$$
$$= (1 \cdot 6) \bmod 7 = 6$$

   2) $(6 + 13) \bmod 7 = (6 \bmod 7 + 13 \bmod 7) \bmod 7 = (6 + 6) \bmod 7 = 5$

b) $\left[\dfrac{1955 - 1900}{4}\right] = \left[\dfrac{55}{4}\right] = 13$ Es gibt 13 Schaltjahre

Seit 01.01.1900 sind also 55 Jahre + 13 Tage = $(365 \cdot 55 + 13)$ Tage vergangen.

Es gilt :

$$(365 \cdot 55 + 13) \bmod 7 = ((365 \cdot 55) \bmod 7 + 13) \bmod 7$$
$$\underset{\text{(Teil a)}}{=} (6 + 13) \bmod 7 \underset{\text{(Teil a)}}{=} 5$$

Der 01.01.1955 ist ein (Montag + 5 Tage) = ein Samstag

Aufgabe 4: *10 Punkte*

Für welche reellen Zahlen x gilt: $|2x^2 - 3| < 1$?
Geben Sie die Intervalle an und skizzieren Sie das Ergebnis auf der Zahlengeraden.

Lösung 4:

a) $2x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \dfrac{3}{2} \Rightarrow\ M = \{x|x \geq \sqrt{1,5} \text{ oder } x \leq -\sqrt{1,5}\}$

$2x^3 < 1 \Leftrightarrow 2x^2 < 4\ \Leftrightarrow\ x^2 < 2\ \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

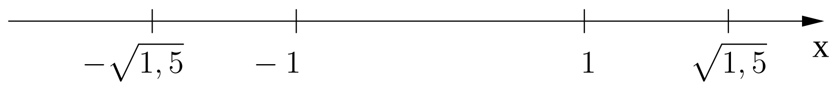
$L_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap M$

$L_1 = (-\sqrt{2} - \sqrt{1,5}] \cup [\sqrt{1,5}\sqrt{2})$

b) $2x^3 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1,5 \Leftrightarrow\ -\sqrt{1,5} < x < \sqrt{1,5}\ \Rightarrow\ M = (-\sqrt{1,5}, \sqrt{1,5})$

$-2x^2 + 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < 2x^2\ \Leftrightarrow\ 1 < x^2\ \Rightarrow x < 1 \text{oder } x > 1$

$L_2 = [(-\infty, -1) \cup (1, \infty)] \cap M$



$L_2 = (-\sqrt{1,5}, -1) \cup (1, \sqrt{1,5})$

c) $L = L_1 \cup L_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{1,5}\,] \cup (-\sqrt{1,5}, -1) \cup (1, \sqrt{1,5}) \cup [1,5\ ,\ \sqrt{2})$
$ = (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$

Aufgabe 5: *10 Punkte*

Für die ganz-rationale Funktion (Polynom)

$$f(z) = z^4 + 9z^3 + 18z^2 - 30z - 100 \quad , \quad z \in \mathbb{C}$$

sollen die Nullstellen berechnet werden. Dabei sei bekannt, dass $z = -5$ und $z = 2$ zwei der Nullstellen sind.Berechnen Sie die Gleichung (Polynom), die die restlichen Nullstellen angibt und bestimmen Sie diese. Geben Sie die faktorisierte Darstellung (Produkt von Linearfaktoren) des Polynoms an.

Lösung 5:

Horner Schema (oder Polynomdivision)

	1	9	18	-30	-100
2		2	22	80	100
	1	11	40	50	0
-5		-5	-30	-50	
	1	6	10	0	

$f(z) = (z+5)(z-2)(z^2+6z+10)$

$z^2 + 6z + 10 = 0 \;\Rightarrow\; z = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36-40}}{2} = \dfrac{-6 \pm 2i}{2} = -3 \pm i$

Aufgabe 6: *10 Punkte*

Über das Abstimmungsverhalten im Vorstand des FC MATSE
sei folgendes bekannt:

- Der Vorstand besteht aus 3 Personen: Lange, Müller, Schmidt.
- Wenn Lange für etwas stimmt (befürwortet), ist Müller stets dagegen.
- Müller und Schmidt stimmen niemals gemeinsam zu.
- Wenn Müller dagegen ist, ist Schmidt dafür.
- Lange und Schmidt stimmen immer unterschiedlich ab.

Ermitteln Sie das Ergebnis der Abstimmung über die Erhöhung der Beitragszahlungen. Dazu sollten Sie eine Wahrheitstafel aufstellen, die für alle mögliche Abstimmungen festlegt, ob diese die obigen Verhaltensregeln erfüllen. Wird die Beitragserhöhung angenommen oder abgelehnt ?

Lösung 6:

Bezeichnet man mit $A_1 - A_4$ die 4 Aussagen so gilt:

Wahrheitstabelle

L	M	S	A_1	A_2	A_3	A_4	$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Aus der Tabelle folgt, dass alle 4 Aussagen nur die Abstimmung 0,0,1 gelten, d.h. die Beitragserhöhung wird abgelehnt.

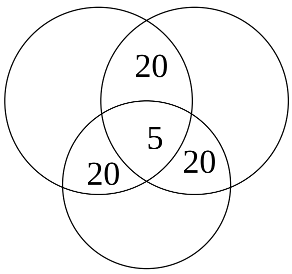
Aufgabe 7: *10 Punkte*

In der Statistik werden Personen oft nach dichotomen Merkmalen klassifiziert, also danach ob eine bestimmte Eigenschaft vorliegt oder nicht.
Beispiele sind Geschlecht, Vorliegen eines Gendefekts, Vorliegen einer Schwangerschaft, usw.
Angenommen man hat 3 solcher Merkmale und es sei bekannt, dass

- bei 30% der Menschen genau eines der Merkmale vorliegt (und die anderen nicht)
- für jede Kombination von exakt zwei Merkmalen die Vorkommenshäufigkeit jeweils 20% beträgt
- 5% aller Menschen alle drei Merkmale besitzen

In wieviel Prozent liegt keines der 3 Merkmale vor? Begründen Sie das mit einem Mengendiagramm und den Formeln für die Mächtigkeiten von Mengen.

Lösung 7:



Nichtbetroffene $= 100 - 30 - 3 \times 20 - 5 = 100 - 95 = 5$

Aufgabe 8: *10 Punkte*

Welche Eigenschaft muss eine Relation haben, damit es sich um eine Äquivalenzrelation handelt?

Gegeben sei die Relation: "zwei Geraden in der Ebene sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben". Prüfen Sie, ob diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung 8:

a) Sie muss reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

   reflexiv : $(x, x) \in R$

   symmetrisch: $(x, y) \in R \;\Rightarrow\; (y, x) \in R$

   transitiv: $(x, y) \in R \;\wedge\; (y, z) \in R \;\Rightarrow\; (x, z) \in R$

b) Die Relation: "zwei Geraden in der Ebene sind parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben" ist:

   reflexiv, weil eine Gerade nur eine bestimmte Steigung hat, also parallel zu sich selbst ist.

   symmetrisch : wenn g_1 die gleiche Steigung zu g_2 hat, so hat auch g_2 die gleiche Steigung zu g_1.

   transitiv: Hat g_1 die gleiche Steigung mit g_2 und g_2 die gleiche Steigung mit g_3, so hat auch g_1 die gleiche Steigung mit g_3

   Diese Relation ist also eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 9: *10 Punkte*

Eine hexadezimale Geheimzahl bestehe aus 4 Zeichen (hexadezimale Ziffern 0...9A...F). Herr Meier kennt die Zahl nicht, möchte sie aber durch Ausprobieren herausfinden. Wieviel Versuche muss er höchstens machen,

a) wenn es keine Einschränkungen gibt.

b) wenn die Zeichen alle verschieden sind.

c) wenn die Zeichen zusätzlich zu b) der Größe nach geordnet sind.

d) wenn die Zeichen zwar der Größe nach geordnet sind, aber mehrfach vorkommen können.

Geben Sie jeweils ein Urnenmodell an.

Hinweis: Die Ergebnisse müssen nicht berechnet werden.

Lösung 9:

Ziffermenge $M = \{0, 1, 2, \cdots, 9, A, B, C, D, E, F\} \;\Rightarrow\; |M| = 16$

a) Ziehen von 4 Ziffern mit zurücklegen, d.h. Permutationen mit Wiederholung
$PER\_mW(16, 4) = 16^4$

b) Ziehen von 4 Ziffern ohne zurücklegen, d.h. Permutationen ohne Wiederholung
$$PER\_oW(16, 4) = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$$

c) Ziehen von 4 Ziffern ohne zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
$$KOM\_oW(16, 4) = \binom{16}{4}$$

d) Ziehen von 4 Ziffern mit zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
$$KOM\_mW(16, 4) = \binom{16+4-1}{4} = \binom{19}{4}$$

Aufgabe 10: *10 Punkte*

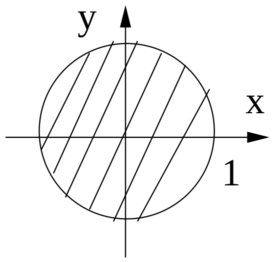
Ermitteln und skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Zahlen:

$$A = \{z \text{ mit } |z| \le 1\}$$
$$B = \{z \text{ mit } |z+i| \ge 2\}$$
$$C = \{z \text{ mit } \mathrm{Im}(z) \le 2\}$$
$$D = A \cup B$$
$$E = B \cap C$$

Lösung 10:

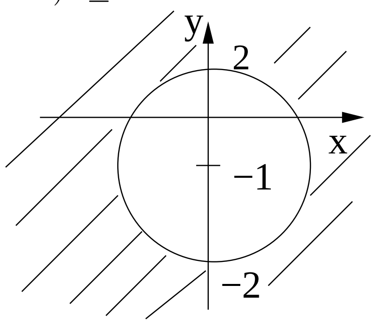
A) $|z| \le 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 \le 1$

Das Innere des Einheitskreises ??? Rand



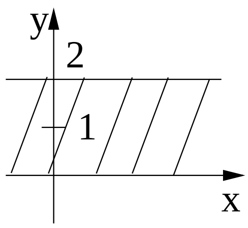
B) $|z+i| \ge 2 \;\Rightarrow\; |x + (y+1)i| \ge 2 \Rightarrow\; x^2 + (y+1)^2 \ge 2^2$

Das äußere des Kreises mit ??? (0,1) und Radius 2 ?? Rand

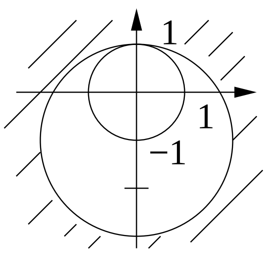


C) $Im(z) \le 2 \;\Leftrightarrow\; y \le 2$

Das Ebene unterhalb der Gerade $y = 2$?? $y = 2$



D) $A \cup B$



E) $B \cap C$