

FH AACHEN STANDORTE JÜLICH, KÖLN, FORSCHUNGSZENTRUM JÜLICH
RECHEN- UND KOMMUNIKATIONSZENTRUM DER RWTH AACHEN

B. Willemsen

BACHELORSTUDIENGANG „SCIENTIFIC PROGRAMMING“
MATSE AUSBILDUNG

Klausur Lineare Algebra, WS 2012/13, am 04.02.2013

Name: _____

Vorname: _____

Matr.-Nr.: _____

Unterschrift: _____

	max. Punktzahl
Aufgabe 1) <input type="text"/>	(12)
Aufgabe 2) <input type="text"/>	(12)
Aufgabe 3) <input type="text"/>	(12)
Aufgabe 4) <input type="text"/>	(12)
Aufgabe 5) <input type="text"/>	(13)
Aufgabe 6) <input type="text"/>	(13)
Aufgabe 7) <input type="text"/>	(13)
Aufgabe 8) <input type="text"/>	(13)
Gesamtpunkte:	Note:

1. Gegeben ist

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

- (a) Zeigen Sie, dass es sich bei B um eine Basis handelt.
- (b) Wandeln Sie B in der angegebenen Reihenfolge mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsverfahrens in eine Orthonormalbasis um.

2. Zu Beginn des neuen Schuljahres kaufen Peter, Renate und Sarah im gleichen Schreibwarengeschäft ihre Hefte für das neue Schuljahr. Renate bezahlt für 1 großes, 3 mittlere und 1 kleines Heft 4,27 €. Peter bezahlt für 3 große, 5 mittlere und 2 kleine Hefte 8,75 €. Sarah bezahlt für 2 große, 2 mittlere und 1 kleines Heft 4,48 €.
- (a) Kann man aus diesen Angaben ermitteln, wieviel große, mittlere und kleine Hefte kosten?
- (b) Thomas braucht 4 große, 8 mittlere und 3 kleine Hefte. Er behauptet, dass er aus den Angaben der anderen errechnen kann, wieviel er zu zahlen hat. Wieviel muss er für seinen Einkauf ausgeben?

3. Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind.

$$U_1 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{P}_2, a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$$

$$U_2 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \leq 0\}$$

4. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 3x + y$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2, y + 2)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2, y^2)$

Begründen Sie ihre Aussage.

5. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_2$ mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + (a_1 + a_2)$$

erzeugt ein Polynom zweiten Grades aus einem Vektor aus \mathbb{R}^2 .

- (a) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix und geben Sie die dabei verwendeten Basen aus beiden Räumen an.
- (b) f ist nicht surjektiv. Zeigen Sie das anhand eines Gegenbeispiels.
- (c) Zeigen Sie, dass f injektiv ist.
- (d) Geben Sie das Bild der Abbildung an.

6. Eine neue Skipiste soll entworfen werden. Dazu liegen folgende Angaben vor:

- Die linke Seite der Piste ist u.a. durch zwei Grenzpunkte an den Stellen $A = (3; 2; 0)$ sowie $B = (0; 3; 2)$ abgegrenzt.
 - Die rechte Seite der Skipiste wird durch die Punktmenge $C_k = (1 + 3k; 2 - k; 4 - 2k)$ modelliert.
 - Auf dem Hang, auf dem die Piste geplant wird, befindet sich bereits eine Seilbahn, die durch die Punktmenge $S_r = (-2r; 3 + r; 4)$ beschrieben wird.
- (a) Zeigen Sie, dass die beiden Grenzen der Skipiste parallel verlaufen, aber nicht identisch sind.
- (b) Stellen Sie die Ebenengleichung, durch welche die Skipiste beschrieben wird, in Normalenform auf.
- (c) Um Unfälle zu vermeiden, muss noch eine rote Wartelinie simuliert werden. Diese soll rechtwinklig zur Skipiste von Grenzpunkt A zu einem bestimmten Grenzpunkt auf der anderen Pistenbegrenzung verlaufen. Bestimmen Sie diesen Punkt.
- (d) Die Seilbahn schwebt in gleichmäßiger Höhe über der Piste. Bestimmen Sie diese Höhe.

7. Bezüglich der Standardbasen E im \mathbb{R}^2 sei folgende Abbildungsmatrix gegeben:

$$M_E^E = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom.
- (b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte.
- (c) Bestimmen Sie die Menge B der Eigenvektoren zu den gefundenen Eigenwerten.
- (d) Da B eine Basis bildet, kann man die Abbildungsmatrix auf einfache Art und Weise auch bzgl. der Basis B der Eigenvektoren darstellen. Bestimmen Sie diese Abbildungsmatrix M_B^B .

8. Die Messdaten für $i = 1, 2, 3, 4$ sind in der folgenden Tabelle dargestellt und sollen durch eine Funktion der Form

$$f(x) = a_1 + a_2x \quad \text{wobei} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

x_i	0	1	2	3
y_i	-1	0	3	6

- (a) Stellen Sie das (überbestimmte) lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Unbekannten a_1 und a_2 auf und zeigen Sie, dass dieses nicht lösbar ist.
- (b) Da keine exakte Lösung existiert, bestimmen sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die Funktion f so, dass die Messdaten möglichst gut approximiert werden. Formulieren Sie die Normalgleichung und bestimmen Sie die gesuchten Parameter als Lösung dieser Gleichung. Geben Sie die errechnete Funktion f explizit an.

