Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear oder nicht linear sind.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x \\ 2y + x \\ x - y \end{pmatrix}$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ x + 1 \end{pmatrix}$

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - y \\ xy \end{pmatrix}$

Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $a, b \in \mathbb{R}$:

$$x_2 - 2x_3 = a \quad \wedge \quad 2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = b \quad \wedge \quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

(a) Berechnen Sie für $a = b = 0$ die Lösungsmenge unter Verwendung des Gauß-Algorithmus.

(b) Untersuchen Sie, ob das lineare Gleichungssystem für $a = 2 \wedge b = 1$ lösbar ist.

(c) Wie hängt b von a ab, wenn das lineare Gleichungssystem lösbar ist? Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 3

Aus einem schmalen Spalt zwischen zwei Punkten $W_1(2/2/2)$ und $W_2(3/3/3)$ fließt Wasser senkrecht - also in z-Richtung - nach unten auf eine ebene Felsplatte, auf der die Punkte $F_1(6/0/0)$, $F_2(3/0/1)$ und $F_3(3/3/-1)$ liegen.

(a) Zwischen welchen Punkten trifft das Wasser auf die Felsplatte?

(b) Berechnen Sie die Richtung, in der das Wasser auf der Felsplatte abfließt.
(Hinweis: Berechnen Sie die Schnittgerade der Felsplatte mit der x-y-Ebene und finden Sie einen Vektor, der senkrecht auf diese Schnittgerade ist, aber in der Felsplattenebene liegt.)

Aufgabe 4

Gegeben seien die drei Einheitsvektoren der kanonischen Basis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$. Außerdem sind folgende Vektoren $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ gegeben:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Stellen Sie die drei Einheitsvektoren der kanonischen Basis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ in der Basis $\mathfrak{B} = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\}$ dar.

Aufgabe 5

Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^n für $n = 2, 3$.

(b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n\cdot(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Gegeben sei die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Betrachten Sie die folgenden Abbildungen

(i) T_1 : die Spiegelung an der x-Achse

(ii) T_2 : die Drehung um $60°$ im mathematisch positiven Drehsinn

(iii) $T_3 := T_2 \circ T_1$: die Hintereinanderausführung von Spiegelung und Drehung

Stellen Sie jeweils die zugehörigen Abbildungsmatrizen A_1, A_2, A_3 auf.

Hinweise:

- In den Spalten einer Abbildungsmatrix stehen die Bilder der Einheitsvektoren.
- $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \cos 60° = \frac{1}{2}$

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A_3. (Rechnen Sie oder argumentieren Sie mit einer Skizze.)

(c) Wie lautet die Abbildungsmatrix A_3' der linearen Abbildung T_3 bezüglich der Basis aus Eigenvektoren?

Aufgabe 7

Bei der Untersuchung einer Bewegung gemäß

$$y(t) = a \,+\, b \cdot \frac{t^2}{2}$$

liefern drei Messungen zu den Zeiten $t = 0, 1, 2$ in Sekunden für die y-Koordinate die Werte $y = 1, -2, 2$ in Metern.

Stellen Sie das Normalgleichungssystem zur Bestimmung der Parameter a und b auf und bestimmen Sie damit die Bestwerte von a und b nach der Methode der kleinsten Quadrate (Lineare Regression).

Aufgabe 8

Sei $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n und T die durch

$$(Tp)(x) := \int_0^x p(t)dt, x \in \mathbb{R}$$

definierte lineare Abbildung $T\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(a) Aus welchen Polynomen besteht das Bild von T?

(b) Geben Sie eine Basis des Bildes von T an.

(c) Zeigen Sie, dass T injektiv ist.

(d) Wie lautet die Umkehrabbildung $T^{-1}\colon \mathrm{Bild}(T) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$?

Aufgabe 9

Testen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			Für jede Orthogonalmatrix A gilt: $A^{-1} = A$.
2			Die Methode der Determinantenentwicklung nach Laplace ist eine rekursive Methode zur Berechnung von Determinanten.
3			Abbildungsmatrizen zu Spiegelungs- und Drehabbildungen sind typische Orthogonalmatrizen.
4			Die rechte Seite jeder Normalform von Hyperebenen gibt den Abstand der Hyperebene zum Ursprung an.
5			Für beliebige quadratische Matrizen A und B gilt: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
6			Auf jedem reellen Vektorraum ist ein Skalarprodukt definiert.
7			Durch Multiplikation einer Matrix mit einem ihrer Eigenvektoren erhält man immer den Eigenvektor selber.
8			Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind immer reell.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, für falsche wird ein Punkt abgezogen! Nicht angekreuzte Behauptungen geben 0 Punkte. Negative Gesamtpunkte werden als 0 Punkte gezählt.