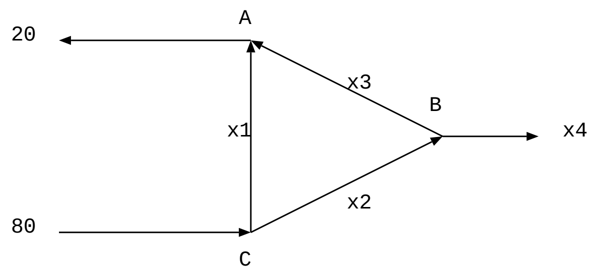
1.) Der abgebildete Ausschnitt aus einem Autobahnnetz stellt den Verkehrsfluss in die angegebenen Richtungen dar. Die Zahlen bzw. x-Werte ($x_1 ... x_4$) beziffern die Anzahl der Autos pro Minute, die diese Strecke befahren.



(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung für den Verkehrsfluss (Anzahl Autos pro Minute).

(b) Wie sieht der maximale Wert für x_3 aus, wenn der Verkehr in die vorgegebenen Richtungen fließen muss ?

2.) Die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $t \in \mathbb{R}$ sei:

$$(A \mid \vec{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & t \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & (1-t)^2 & 0 \end{array}\right)$$

Für welche t hat das System

- eine eindeutige Lösung?
- unendlich viele Lösungen?
- keine Lösung?

(Mit Angabe der Lösungen)

3.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass A invertierbar ist, ohne die Inverse zu berechnen.

(b) Berechnen Sie A^{-1}.

(c) Ist die Matrix symmetrisch?

(d) Handelt es sich um eine Orthogonalmatrix?

(e) Ist die Matrix positiv definit?

Begründen Sie ihre Aussage jeweils kurz.

4.) Während des Studiums der Biologie wird die Entwicklung einer Fliegenart von Generation zu Generation experimentell untersucht. Dazu benötigen die Studenten die Hilfe der MATSE Studenten. Sie sollen die im Versuch zu erwartenden Populationen anhand einiger Randbedingungen berechnen. Bei den Fliegen unterscheidet man drei Altersstufen:
Jungtiere (Altersstufe 1), heranwachsende Tiere (Altersstufe 2) und die erwachsenen Tiere (Altersstufe 3).
Im Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ wird jeweils die Anzahl der Fliegen der entsprechenden Altersstufe durch die Variablen a_1, a_2, a_3 angegeben. Der Vektor $\vec{a}$ beschreibt also die Verteilung der Altersstufen in der Population.
Die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

beschreibt, wie sich die Fliegen von Generation zu Generation entwickeln, d.h. mit $M \cdot \vec{a}$ berechnet sich die Verteilung der nachfolgenden Generation.

(a) Erläutern Sie kurz, welche Bedeutung die Matrixelemente v_1 und v_2 haben.

(b) Seien $v_1 = \frac{2}{3}$ und $v_2 = 4$.
Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.
Die momentane Population ist $a_1 = 600$, $a_2 = 240$ und $a_3 = 120$. Was haben die Biologiestudenten als Nachfolgepopulation zu erwarten?

(c) Für $v_1 = \frac{2}{3}$ und $v_2 = 4$ sei die Nachfolgepopulation $a1 = 900$, $a2 = 330$, $a3 = 90$. Wie lautete die Vorgängerpopulation?

(d) Falls $v_1 = 1$ ist, bei welchem Wert für v_2 gibt es Populationen, die von Generation zu Generation gleich bleiben?
Welche Verteilung auf die Altersstufen ergibt sich in diesem Fall, wenn die Gesamtpopulation 1200 Tiere beträgt?

5.) Ein Birkenbaum hat in 2 m Höhe einen Ast, der gerade in Richtung $(-3, 2, 2)^T$ wächst, wobei die dritte Komponente die Höhe angibt. Auf dem unebenen Gelände steht von dem Birkenbaum aus gesehen an der Stelle $(-3, 8, -2)^T$ eine Linde, die einen Ast in 3 m Höhe besitzt. Dieser Ast wächst genau in die Richtung $(1, -2, 2)^T$.

(a) An welcher Stelle muss eine Spinne mit dem Bau eines Netzes beginnen, wenn sie von dem beschriebenen Ast des Birkenbaums einen möglichst kurzen Faden zu dem beschriebenen Ast der Linde spinnen möchte?

(b) Wie lang muss dieser Faden sein?

6.) Sei $\mathcal{S}$ der von den Vektoren

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Teilraum von $\mathbb{R}^4$.

a) Konstruieren Sie eine Orthonormalbasis $\vec{w_1}, \vec{w_2}$ von $\mathcal{S}$.

b) Zerlegen Sie den Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gemäß $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in \mathcal{S}$, $\vec{z} \in \mathcal{S}^\perp$, und berechnen Sie $\vec{y}$ und $\vec{z}$.

7.) Sei $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und
$\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$.

a) Finden Sie einen Vektor $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, so dass $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ eine zweite Orthonormalbasis ist. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an.

b) Betrachten Sie einen beliebigen Vektor $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = \xi_1\vec{v}_1 + \xi_2\vec{v}_2$ und bestimmen Sie die Matrix M (Transformationsmatrix, Übergangsmatrix), die den Basiswechsel gemäß

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

beschreibt.

c) Für einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ sei $\vec{y} = L(\vec{x})$ der Vektor, den man aus $\vec{x}$ durch Spiegelung an der durch $\vec{v}_1$ bestimmten Achse erhält (machen Sie eine geeignete Skizze);
$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung (das ist offensichtlich, Sie brauchen das nicht zu begründen). Wie lautet die Matrix von L bzgl. der Basis $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?

8.) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 4 \\ 3 & -6 & 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

lässt sich überführen in folgende Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Zeilenstufenform:

(a) $\dim(\mathrm{Kern}(A))$, $\dim(\mathrm{Bild}(A))$

(b) eine Basis des Kerns, eine Basis des Bildes sowie eine Basis des Zeilenraumes (Lineare Hülle der Zeilenvektoren) von A