Klausur zur Linearen Algebra 11.03.2011

1.) Die 3 Badmintonklubs A, B und C einer Stadt bringen zu jedem ihrer Spiele immer gleich viele Zuschauer mit. Sie wollen anhand folgender Aussage eines Reporters die Anzahl der Zuschauer jeder Mannschaft ermitteln:

„Bei dem Spiel A gegen B kamen 200 Zuschauer, das Spiel B gegen C sahen 700 Zuschauer und beim Hin- und Rückspiel von A gegen C kamen zusammen 600 Zuschauer.“

Warum kann diese Aussage des Reporters nicht stimmen?

2.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Nennen Sie zwei Bedingungen, die invertierbare Matrizen immer erfüllen.

(b) Berechnen Sie A^{-1}.

(c) Berechnen Sie $\det(A), \det(A^T), \det(A^{-1})$ und $\det((A^{-1})^T)$.

(d) Ist A eine Orthogonalmatrix? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) Ein Rasensprenger mit der Reichweite $15m$ bewässert genau den (kleineren der beiden) Sektor(en) zwischen einer Sonnen- und einer Ringelblume, die vom Rasensprenger aus gesehen an den Stellen

$$S = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad R = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

wachsen, wobei die Größen in m angegeben sind.

(a) Wo müsste eine Blume stehen, die genau in der Mitte des Sektors platziert ist. Dabei genügt die Angabe einer Richtung, die genaue Position ist irrelevant.

(b) Wird versehentlich auch der wasserscheue Kaktus an der Stelle

$$K = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

bewässert?

Eine Skizze ist zwar hilfreich, kann aber nicht als Lösung gewertet werden.

4.) Gegeben sei eine Abbildung mit der zugehörigen Matrix A.

(a) Wie lauten die Fachbegriffe zu folgenden Beschreibungen:

i. Die Menge der Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden

ii. Die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen- oder Spaltenvektoren

iii. Die Menge der Vektoren, auf die abgebildet werden kann

(b) Berechnen Sie in Abhängigkeit des Parameters b die drei Ausprägungen der Begriffe aus Teil (a) zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & b \end{pmatrix}.$$

5.) Eine Zahnradbahn fährt mit einer konstanter Geschwindigkeit von

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro Zeiteinheit, d.h. dass die Bahn pro Zeiteinheit zwei Längeneinheiten in x-Richtung, zwei Längeneinheiten in y-Richtung und eine Längeneinheit in z-Richtung zurücklegt. Die z-Richtung gibt dabei die Höhe an.

(a) Wie groß ist die Steigung der Trasse der Zahnradbahn? Drücken Sie dabei die Steigung in %, also als Höhenunterscheid pro 100 Längeneinheiten in der x-y-Ebene, aus!

(b) Ein Beobachter steht auf einem Berg, der sich von der jetzigen Position der Bahn aus gesehen genau an der Stelle

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix}$$

befindet. Wie lange muss der Beobachter warten, bis die Zahnradbahn den kürzesten Abstand zu ihm hat?

6.) Es sei V der Vektorraum der auf dem Intervall $[a, b]$ definierten Funktionen mit den Unterräumen

$$\begin{array}{rrcl} & U_1 & := & \{f(x) \mid f(a) = 0\} \\ \text{und} & U_2 & := & \{f(x) \mid f'(b) = 0\}\,. \end{array}$$

Beweisen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass $U_1 \cup U_2$ keinen Unterraum bildet.

Tipp: Erstellen Sie ein Gegenbeispiel mit Hilfe der Vektoren

$$\begin{array}{rrcll} & u_1 & \in & U_1 & \subset U_1 \cup U_2 \\ \text{und} & u_2 & \in & U_2 & \subset U_1 \cup U_2, \end{array}$$

wobei $u_1 \notin U_2$ und $u_2 \notin U_1$.

7.) Gegeben sei die Matrix

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A_a in Abhängigkeit von a.

(b) Bestimmen Sie a in der Art, dass A_a die Eigenwerte -1 und 2 besitzt.

(c) Bestimmen Sie die zu den beiden Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren.

8.) Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ ist eine Matrix $M_n := (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 + a^2 & \text{für } i = j \\ a & \text{für } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\det(M_n) = \sum_{i=0}^{n} (a^2)^i.$$