Klausur zur Linearen Algebra 23.09.2010

1.) Sei eine Matrix A gegeben, mit $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie A^k für $k = 1..4$.

(b) Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (2^n - 1)a & 2^n \end{pmatrix}$$

2.) Gegeben ist die Menge von Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren linear unabhängig sind.

(b) Orthonormieren Sie die Vektoren mit dem Verfahren von Gram-Schmidt.

3.) Gegeben sei folgender Ausdruck:

$$AA^T B^{-1}(\vec{a} \times \vec{b})$$

(a) Geben Sie jeweils den Typ $n \times m$ von A, B, $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so genau wie möglich an. Sind alle Typen eindeutig? Begründen Sie Ihre Antworten.

(b) Begründen Sie, ob Sie die Determinante des Ausdrucks bestimmen können.

4.) Ihnen sind die Datenpunkte $(0, 2), (1, 3), (2, 1)$ und $(3, 3)$ gegeben. Finden Sie eine passende Ausgleichsgerade mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate.

5.) In einem Land gibt es drei wöchentlich erscheinende Computer-Zeitschriften Z_1, Z_2, Z_3. 70% der Käufer von Z_1 bleiben bei Z_1, 50% der Käufer von Z_2 bleiben bei Z_2 und 60% der Käufer von Z_3 bleiben bei Z_3. Die weitere Verteilung der Käuferanteile wird wie folgt beobachtet:
20% der Käufer von Z_1 wechseln zu Z_2, 20% der Käufer von Z_2 wechseln zu Z_3 und 10% der Käufer von Z_3 wechseln zu Z_1.

(a) Stellen Sie das Kaufverhalten in einem Diagramm dar und erzeugen Sie die zugehörige Übergangsmatrix.

(b) Zu Beginn der Untersuchung liegen die Käuferanteile bei 30% für Z_1, 40% für Z_2 und 30% für Z_3. Welche Käuferanteile haben die Zeitschriften nach einer Woche?

6.) Bei einer militärischen Übung soll der Kurs eines U-Boots bestimmt werden. Zwei Schiffe orten hierzu das U-Boot.
Das Schiff A peilt von der Position $(0|0|0)$ das U-Boot in der Richtung $\vec{x}_A = (6|\,9|\,-\frac{1}{2})$ an. Zur gleichen Zeit meldet das Schiff B (Position $(0|4|0)$) die Richtung $\vec{x}_B = (3|\,4|\,-\frac{1}{4})$.

(a) Berechnen Sie die Koordinaten des U-Boots bei dieser Peilung.

(b) Vier Minuten später ergibt eine zweite Peilung der beiden Schiffe die U-Boot-Koordinaten $(23|36|-\frac{9}{4})$. (Alle Angaben in Kilometern.)

i. Befindet sich das U-Boot auf einer Steig- oder Sinkfahrt?

ii. Geben Sie eine Geradengleichung für die U-Boot-Bewegung an.

iii. Mit welcher Geschwindigkeit (in Kilometern pro Stunde) bewegt sich das U-Boot?

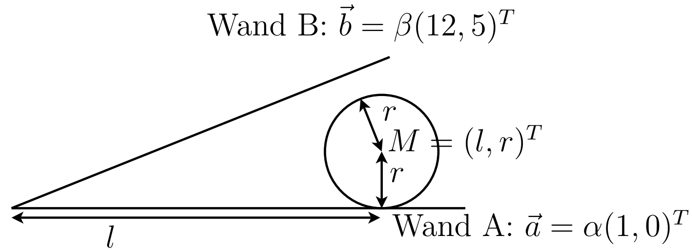
7.) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist eine Matrix A_t gegeben, mit

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_t in Abhängigkeit von t.

(b) Für welche Werte von t besitzt A_t jeweils keinen, genau einen, zwei verschiedene Eigenwerte?

8.) Eine Kugel mit Radius r wird so weit wie möglich in den Winkel einer spitzen Raumecke geschoben. Dies erfolgt in mehreren Zwischenschritten.



(a) Nehmen Sie an, die Kugel liegt dicht an der Wand A, aber noch nicht genau in der Ecke. Der Abstand zwischen dem Berührungspunkt zur Wand A und der Raumecke sei l. Der Kugelmittelpunkt ist demnach $M = (l, r)^T$ (siehe Skizze). Berechnen Sie den Abstand x zwischen Kugeloberfläche und der Wand B in Abhängigkeit von r und l.

(b) Die Kugel wird jetzt entlang der Wand A so weit wie möglich in die Ecke geschoben. Welche Bedingung muss anschließend für x gelten?

(c) Es sei r=3 cm. Wie groß ist l, wenn die Kugel beide Wände berührt?