Klausur zur Linearen Algebra 14.07.2010

1.) In einem Berghang steht ein 20 Meter hoher Turm mit einem Funksender auf der Spitze, dessen Reichweite in alle Richtungen 100 Meter beträgt. Der Berghang hat eine gleichmäßige Steigung von 50 % (entspricht 45° zur horizontalen Fläche) und ist ein Südhang, d.h. die Talsohle liegt im Süden, der Gipfel im Norden.

(a) Berechnen Sie die kürzeste Entfernung zwischen Sender und Berghang.

(b) Berechnen Sie für jede der vier Himmelsrichtungen den Punkt ($\in \mathbb{R}^3$) auf dem Hangboden, an dem man den Sender gerade noch empfangen kann.

Hinweis: Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem!

2.) Die erweiterte Matrix des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & -1 & 2 \\ \alpha & \alpha & 4 & 4 \\ 0 & \alpha & 5 & \beta \end{array} \right)$$

Für welche α und β hat das System

- keine Lösung?
- eine eindeutige Lösung?
- unendlich viele Lösungen?

3.) Gegeben sei die Ebene E_1 in Normalform

$$E_1 \ : \ x + 2y + 3z = 5$$

(a) Wandeln Sie die Ebenengleichung in eine Parameterdarstellung um.

(b) Geben Sie eine äquivalente Parameterdarstellung mit orthonormierten Richtungsvektoren an.

4.) Gegeben sei die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie A^k für $k = 1..3$.

(b) Stellen Sie eine Vermutung auf für A^n und beweisen Sie diese.

5.) Man zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist auf drei Arten:

(a) Definition: $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{x} \neq \vec{0} : \vec{x}^T A \vec{x} > 0$

(b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(c) Alle Hauptabschnittsdeterminanten sind positiv.

6.) In einer Schachtel befinden sich 13 Münzen mit einem Gesamtwert von 3,50€. Es handelt sich dabei um 10ct-, 20ct- und/oder 50ct-Münzen. Wieviele Münzen jeder Sorte befinden sich in der Schachtel. Geben Sie alle möglichen Stückelungen an.
Hinweis: Stellen Sie ein geeignetes lineares Gleichungssystem auf!

7.) Sei I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und J_n die $n \times n$-Matrix mit lauter Einsen. Zeigen Sie, dass die Inverse zu $(I_n - J_n)$ gleich $I_n - \dfrac{1}{n-1} J_n$ ist, indem Sie den Ansatz $AA^{-1} = I$ verwenden.

8.) Die Firmen ASol, BSol und CSol führen eine völlig neuartige Solaranlage auf dem Markt ein. Zu Beginn besitzt ASol 40%, BSol 20% und CSol 40% Marktanteil. Während des ersten Jahres verliert ASol 10% seiner Kunden an CSol, BSol gibt 20% seiner Kunden an ASol und 10% an CSol ab, und CSol verliert jeweils 10% an ASol und BSol. Während der folgenden Jahre verändern sich die Marktanteile stets nach demselben Schema.

(a) Welche Marktanteile besitzen die drei Firmen am Ende des ersten bzw. zweiten Jahres?

(b) Nach einigen Jahren haben sich die Marktanteile eingependelt und verändern sich nicht mehr. Alle drei Unternehmen genießen ihren großen wirtschaftlichen Erfolg. Wie lautet der Name des Marktführers? Begründen Sie Ihre Antwort!