Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 23.9.2009

1.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die ersten fünf Potenzen der Matrix A.
b) Was fällt Ihnen auf? Leiten Sie daraus eine Regel ab.
c) Beweisen Sie die Regel exemplarisch für $A^{4n+1} (n \in \mathbb{N}_0)$ mittels vollständiger Induktion.

2.) Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen lineare Abbildungen sind und geben Sie gegebenenfalls die Abbildungsmatrix an.

a) $f(x, y, z) = (3x + 7y - z, 2 - y - z, x + y - 3z)$
b) $f(x, y, z) = (x^2 + y + z, x - y + z, 3x + 2y - z)$
c) $f(x, y, z) = (x + 5y + z, 3x - y + 2z, 6x + 5y - 7z)$

3.) Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem Ax=b mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1+\alpha \\ 2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) keine Lösung besitzt,
b) genau eine Lösung besitzt
c) unendlich viele Lösungen besitzt.
d) Für den Fall, dass es eindeutig lösbar ist (Lösung hängt gegebenenfalls noch von α ab), soll diese auch angegeben werden.

4.) Untersuchen Sie in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, welche Dimension der von den Vekoren $\vec{a} = (\alpha - 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha)$, $\vec{b} = (\alpha, -1, 1)$, $\vec{c} = (\alpha + 1, -2, \alpha + 1)$ aufgespannte Untervektorraum hat, und geben Sie jeweils eine Basis des von ihnen aufgespannten Untervektorraumes an.

5.) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

6.) Bestimmen Sie - wenn möglich - die Inverse der Matrix A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7.) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 & -4 \\ -1 & -3 & 7 & -1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Man bestimme den Kern von A und seine Dimension.

(b) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\mathrm{Bild}(A))$.

(c) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

8.) Eine Mobilfunkantenne muss wegen der stürmischen Lage auf einem Berg mit Seilen stabilisiert werden. Die Spitze der Antenne hat die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die Seile werden an den Punkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befestigt.

(a) Berechnen Sie die Ebene, in der die Punkte A,B,C liegen, in Hessescher Normalform.

(b) Der Fuß der Mobilfunkantenne liegt in der gleichen Ebene wie die Endpunkte der Seile. Die Antenne steht genau in z-Richtung. Bestimmen Sie die Höhe der Antenne (1 LE = 10 m).

9.) Mit der Wassertiefe ändert sich der Druck, der auf einem im Wasser befindlichen Körper wirkt. Es wird ein Experiment durchgeführt, um den vermuteten Zusammenhang (Druck $= \alpha + \beta \cdot$Wassertiefe) zwischen Wassertiefe und Druck zu überprüfen. Es wurden folgende Messwerte aufgenommen.

Wassertiefe	Druck		
1	2		
3	4		
5	5.5		
7	8.5		
9	10		

a) Bestimmen Sie die Parameter α und β nach der Methode der kleinsten Quadrate.

b) Ermitteln Sie mit diesen Werten den Druck in einer Tiefe von 15 Metern.

10.) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' des Punktes

$$A = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

an der Geraden g (siehe Zeichnung):

$$g : X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

A

A'

g