Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 9.7.2009

1.) Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Gleichung der Ebene E, in der alle 3 Punkte liegen.

(b) Es sei U die Menge aller Punkte, die von A und B den gleichen Abstand haben. Geben Sie eine Gleichung für U an. Um welches geometrische Gebilde handelt es sich?

(c) Berechnen Sie die Schnittmenge von U und E.

2.) Heinz wandert zu seinem Freund Jupp, der von ihm aus 10 km in Richtung (3, 4) wohnt. Er läuft in der richtigen Richtung los, doch auf der Hälfte der Strecke schaut er auf seinen defekten Kompass und ändert seinen Weg in Richtung (2,1). Da er sich unsicher ist, versucht er laufend das Haus von Jupp zu erspähen. Leider herrscht leichter Nebel und die Sichtweite beträgt nur 2 km. Wird Heinz das Haus von Jupp sehen oder läuft er an ihm vorbei? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit $det(A) = 2$. Berechnen Sie für beliebige $c \in \mathbb{R}$ und $1 \leq k \leq n$ die folgenden Determinanten:

(a) $det(B)$, wobei

$$b_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } j \neq k \\ c \cdot a_{ij} & \text{falls } j = k \end{cases},$$

d.h. B entspricht der Matrix A, nur die k-te Spalte wurde mit einer Konstanten c multipliziert.

(b) $det(c \cdot A)$

(c) $det(A^{-1})$

(d) $det(A \cdot A^T)$

(e) $det(C)$, wobei

$$c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{falls } j \neq 1 \text{ und } j \neq 3 \\ a_{i3} & \text{falls } j = 1 \\ a_{i1} & \text{falls } j = 3 \end{cases},$$

d.h. C entspricht der Matrix A, nur die erste und dritte Spalte sind vertauscht.

4.) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Bilden sie eine Basis des gesamten Raumes V? Wenn nicht, ergänzen Sie zu einer Basis. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a)
$$V = \mathbb{R}^2, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$V = \mathbb{R}^3, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c)
$$V = \mathbb{R}^3, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

5.) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:
$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + \frac{n(n-1)}{2} \cdot ac \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.) Gegeben sind die Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die beiden Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ derart, dass $\vec{a} = \vec{x} + \vec{y}$, wobei $\vec{x}$ parallel zu $\vec{b}$ und $\vec{y}$ orthogonal zu $\vec{b}$ ist, d.h. $\vec{x} || \vec{b}$ und $\vec{y} \perp \vec{b}$.

7.) Sei
$$f\left(\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} w - 2x + 3z \\ -w + 3x - 2y - 4z \\ -x + 2y + z \\ w - 4y + z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für die obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

(b) Man bestimme den Kern von f und seine Dimension.

(c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\mathrm{Bild}(f))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

8.) Die Bevölkerung eines Landes kann man grob in die drei Klassen Oberschicht (OS), Mittelschicht (MS) und Unterschicht (US) einteilen.
Für eine Modellrechnung nimmt man an, dass sich in einem bestimmten Land derzeit 10% der Bevölkerung in der Oberschicht, 60% in der Mittelschicht und 30% in der Unterschicht befinden.
Um die Entwicklung der Bevölkerung nach 30 Jahren darzustellen, kann man vereinfacht folgende Übergangsmatrix annehmen:

	OS	MS	US
OS	55%	10%	5%
MS	40%	70%	15%
US	5%	20%	80%

d.h. z.B., dass sich 15% der Menschen der Unterschicht nach 30 Jahren in der Mittelschicht befinden.

(a) Bestimmen Sie die Bevölkerungsverteilung von 4000 (repräsentativ ausgewählten) Menschen nach 30 Jahren.

(b) Wie lautet der Ansatz für folgende Fragestellung:
Wie ist die momentane Verteilung der Bevölkerungsschichten unter der Annahme, dass nach 30 Jahren 420 Leute der OS, 2520 Leute der MS und 1260 Leute der US angehören ?
<u>Hinweis:</u> Das Ergebnis von Teil (b) muss nicht berechnet werden, nur Ansatz aufschreiben .

9.) Bei einem wissenschaftlichen Experiment sind zu den äquidistanten Zeiten $t = 0$ min. bis $t = 3$ min. die folgenden Werte des Druckes gemessen worden:

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 5$$

Welche Werte ergeben sich für die Parameter, wenn das Modell
$Druck = a + b * Zeit$
zugrunde gelegt wird ? Man benutze die Methode der kleinsten Quadrate.
Was ergibt sich, wenn der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$ sicher ist, also ohne Messfehler ist ?

10.) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix}, b \neq 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $a + b$ Eigenwert von A ist.

(b) Berechnen Sie den zum Eigenwert $a + b$ gehörigen normierten Eigenvektor von A.