Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 24.9.2008

1.) Zeigen Sie, dass für alle Orthogonalmatrizen A gilt $|det(A)| = 1$.
Tipp: Starten Sie mit der Berechnung von $det(A \cdot A^T)$.

2.) Das abgebildete Haus hat die Ausmaße: 10 m in x-Richtung, 4 m in y-Richtung und zwischen 4 und 8 m in z-Richtung (siehe Abbildung). Genau in der Mitte seines Daches steht eine 1 m hohe Antenne. Auf das Haus fällt (paralleles) Sonnenlicht in Richtung des Vektors $\vec{v} = (1, -1, -3)$.

(a) Berechnen Sie Anfangs- und Endpunkt der Antenne. Der Koordinatenursprung liegt in der linken unteren Hausecke.

(b) Berechnen Sie den Schattenpunkt der Antennenspitze auf der Dachoberfläche.

(c) Wie lang ist der Schatten der Antenne auf dem Dach?

8 m

4 m

4 m

10 m

3.) Zeigen Sie, dass die Wahrheitswerte w und f mit der XOR-Verknüfung

XOR	w	f
w	f	w
f	w	f

eine Gruppe bilden.

4.) Sei

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ -3x + z \\ -x + 2y + 5z \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.

(b) Man bestimme Kern von F und seine Dimension.

(c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\mathrm{Bild}(F))$.

(d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

5.) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

6.) Gegeben seien zwei Punkte $P = (3, 3, 2)$ und $Q = (0, 2, -2)$ und die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g_1 durch den Punkt P in Richtung von $\vec{a}$ und der Geraden g_2 durch den Punkt Q in Richtung von $\vec{b}$.

(b) Schneiden sich die beiden Geraden? Sind sie parallel? Begründen Sie jeweils Ihre Antworten.

(c) Berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden Geraden.

7.) Für welche reellen Zahlen a ist die folgende Matrix A invertierbar,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

8.) Gegeben ist

$A_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & -1-t \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_t = \begin{pmatrix} -t \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Man zeige, dass der Vektor $\vec{x}_t$ Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

Man bestimme auch den zweiten Eigenwert.

9.) Orthonormieren Sie nach dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10.) Welche der folgenden Funktionen sind linear abhängig bzw. linear unabhängig?

(a) $f_1(x) = 3 + 2x + x^2$, $f_2(x) = -2 + x + x^2$, $f_3(x) = -7 + x^2$

(b) $f_1(x) = 1 + 2x + x^2$, $f_2(x) = -3 + 5x + 4x^2$, $f_3(x) = -2 + 8x + 5x^2$