P. Jansen, FZ Jülich, H.J. Pflug, RZ/RWTH

Klausur zur Linearen Algebra II

7.7.2008

1. Für welche Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix}^3 = I \quad ?$$

(I: Einheitsmatrix).

2. a) Zeigen Sie, dass die symmetrische Matrix H_n für jeden Spaltenvektor $u \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ orthogonal ist:

$$H_n := I_n - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

I_n ist dabei die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

<u>Hinweis:</u> Berechnen Sie nicht die Komponenten von H_n.

b) Verifizieren Sie das Ergebnis für $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Anna, Berta und Carla kaufen im Schmuckbedarfsgroßhandel Perlen unterschiedlicher Qualität. Es gibt drei verschiedene Sorten, welche Ober- und Untergrenzen für die Einzelpreise ergeben sich?
   Anna kauft jeweils 10 Perlen jeder Qualität und bezahlt 50 Euro. Berta nimmt auch 30 Perlen, aber nur von Qualität 1 und 2. Sie nimmt jeweils gleich viele und bezahlt 60 Euro. Carla bezahlt per Kreditkarte ihre 60 Perlen für 110 Euro. Sie wählt 25 von Sorte 1, 25 von Sorte 2 und 10 von Sorte 3.

4. Für welche reellen Zahlen a ist die folgende Matrix A invertierbar,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

5. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie $Kern(A)$, $Kern(A^2)$ und $Kern(A^3)$ an.
b) Formulieren Sie eine Behauptung, welche der folgenden Beziehungen $=, \neq, \subset$ oder $\subseteq$ zwischen $Kern(A)$ und $Kern(A^2)$ besteht.
c) Beweisen Sie die Behauptung aus b) für beliebige quadratische Matrizen A.

6. Bestimmen Sie zu den drei Punkten in der Ebene $P = (1,1), Q = (0,4)$ und $R = (2,1)$ den größten Kreis, dessen Inneres keinen der drei Punkte enthält, und den kleinsten, der alle drei Punkte enthält, wenn der Mittelpunkt
   - im Koordinatenursprung
   - im Schwerpunkt der drei Punkte, also (1,2), liegt.

7. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ existieren
a) keine Lösung
b) unendlich viele Lösungen
c) eine eindeutige Lösung ?

8. Man berechne alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist die Matrix diagonalisierbar (d.h. existiert TDT^{-1}) ? Falls ja, wie würde dann eine Transformationsmatrix T lauten?

9. Der 10 km hohe Luftraum über „Quadrat-Stadt“, einer ebenen Stadt mit quadratischer Grundfläche von 4 km Seitenlänge soll nicht überflogen werden. Es nähert sich ein Flugobjekt entlang einer Geraden.

   Berechnen Sie die Länge der Strecke, die es in der Zone zuücklegt.

   Bezogen auf das kartesische Koordinatensystem (in Einheiten von km), dessen Ursprung in einer Ecke der Stadt liegt und deren Grenzen entlang der positiven x- bzw. y-Koordinatenachsen verlaufen, nähert sich das Objekt entlang der Geraden

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 17,5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,75 \end{pmatrix}.$$

   Machen Sie zuerst eine Skizze.
   Berechnen Sie sodann den Eintrittspunkt, der in der (xz)-Ebene liegt.
   Wo liegt der Austrittspunkt?
   Wie groß ist schließlich die Länge der Strecke?

10. a) Man zeige durch vollständige Induktion, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , x \in \mathbb{R}$$

gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & \sum_{k=1}^{n-1} x^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , n \in \mathbb{N}.$$

b) Man gebe auch A^{-1} an ($x \neq 0$).