Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II 20.9.2007

1.) Sie sitzen auf einer Bank in einem Park. 3 m östlich und 5 m nördlich von Ihnen befindet sich die Mitte eines 1 m dicken Baumes. Können Sie den herrenlosen 500 Euro-Schein sehen, der 5 m östlich und 12 m nördlich von Ihnen auf dem Rasen liegt? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie Ihre Antwort.

2.) Für welche reellen Werte von α ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) invertierbar,

(b) symmetrisch,

(c) positiv definit,

(d) orthogonal (orthogonale Spalten),

(e) eine Dreiecksmatrix.

3.) Berechnen Sie die folgenden Determinante:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

falls sie existiert.

5.) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6.) Gegeben sind im $\mathbb{R}^2$ die Geraden

$$G_1 : 4x + 3y = 15 \quad \text{ und } G_2 : 12x - 5y = 13$$

Bestimmen Sie einen der 4 Punkte P_1 bis P_4, die von G_1 den Abstand 3 und von G_2 den Abstand 6 haben.

7.) Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

(a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$

(c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

8.) Eine Pyramide hat die Ecken $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (-1, -1, 0)$ und $D = (0, 1, 2)$. Wie groß ist jeweils der Cosinus des Winkels zwischen der Grundfläche (ABC) und der Seitenfläche (ABD) ?

9.) Bestimmen Sie zur Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

die Menge

$$M_3 = \{t \in \mathbb{R} \mid rg(A_t) = 3\}$$

10.) Zeigen Sie, dass für eine komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad i^2 = -1$$

gilt, dass A^{4n} eine reelle Matrix ist für $n \in \mathbb{N}$.