

1. Man bestimme die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Führen Sie eine Probe durch.

2. Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie die Richtigkeit folgender Formel:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & (n-1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Bei der letzten Lieferung ergab sich folgendes:
100 Bleistifte, 20 Pakete Kopierpapier und 10 Ordner kosteten 100 Euro. 50 Bleistifte, 10 Pakete Kopierpapier und 20 Ordner kosteten 140 Euro. Sie möchten jetzt 200 Bleistifte und 5 Ordner bestellen. Mit welchem Preis müssen Sie höchstens rechnen, wenn Ihr Lieferant unveränderte Festpreise hat?

4. Gegeben ist

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 - 2t & 2 \\ t & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_t = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass der Vektor \vec{x}_t Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert?

Man bestimme den zweiten Eigenwert und den dazu gehörigen Eigenvektor.

5. Bestimmen Sie in $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \end{pmatrix}$

die fehlende Elemente, sodass A orthogonal ist, also die Spalten und Zeilen orthonormal sind.

Es ist nur eine Lösung gesucht.

6. Man schraffiere den Bereich der (x, y) Ebene, der gegeben ist durch
- $$x + y \geq 4,$$
- $$\frac{1}{2}x + y \leq 6, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$
- Bestimmen Sie die eingeschlossene Fläche. Wieviel m^3 Teer benötigt man für die Tragdeckschicht einer Straße, die eine Dicke von 8 cm hat, wenn die obigen Angaben in Metern gemessen sind?

7. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die vier verschiedenen (evtl. komplexen) Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Ein Draht sei straff zwischen Punkten gespannt, die bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems die Koordinaten $(10, 10, 10)$ bzw. $(10, 20, 30)$ haben. Wie lang ist der Draht? Wie weit ist der Punkt mit den Koordinaten $(0, 10, 10)$ von dem Draht entfernt (Rechnung oder Begründung)?

9. Sei

$$F \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x - y + z \\ 4x - y + 2z \end{pmatrix}$$

- (a) Geben Sie für obige Abbildung die Abbildungsmatrix an.
- (b) Man bestimme Kern von F und seine Dimension.
- (c) Mit Hilfe der Dimensionsformel bestimme man $\dim(\text{Bild}(F))$.
- (d) Geben Sie eine Basis des Bildes an.

10. Für die Matrizen in $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot zeige man:
- (a) M ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.
 - (b) Die Multiplikation ist kommutativ.
 - (c) Für jede Matrix aus M (außer der Nullmatrix) gibt es ein inverses Element, das ebenfalls in M liegt.