Probeklausur zur Linearen Algebra I

22.01.2013

Zeit: 120 Minuten, 10 P. pro Aufgabe

1. Man betrachte die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und bestimme die orthogonale Projektion des Vektors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf den von v_1, v_2 aufgespannten Unterrraum.

2. Geben Sie sämtliche Gruppenaxiome an und überprüfen Sie, ob die ganzen Zahlen mit der folgenden Verknüpfung eine Gruppe bilden:

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 + 1$$

3. Die Matrix A lautet

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie eine Vermutung für A^n auf und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

4. Wir betrachten den Vektorraum
$C([0, 2\pi]) := \{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}; \text{ f ist stetig auf } [0, 2\pi]\}$
mit dem Skalarprodukt

$$< f, g >:= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

Zeigen Sie, dass die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{sin(x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ orthonormal bezüglich $< .,. >$ auf $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ sind.
Hinweis:
$\int sin^2(x)dx = \frac{1}{2}(-sin(x)cos(x) + x) + C$
$\int cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(sin(x)cos(x) + x) + C$

5. Gegeben sind zwei Geraden:
$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \; \vec{v}$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Geben Sie einen möglichen Vektor $\vec{v}$ an, damit

   (a) g und h sich in S(-4,0,-1) schneiden
   (b) g und h windschief sind
   (c) g und h sich orthogonal schneiden

   Begründen Sie Ihre Entscheidungen.

6. Gegeben ist die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Zeigen Sie (ohne Aufgabenteil b zu lösen), dass M eine Menge linear unabhängiger Vektoren ist.

   (b) Orthonormieren Sie M nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

   (c) Woran kann man beim Verfahren von Gram-Schmidt linear abhängige Eingabevektoren erkennen?

7. Mit Hilfe eines Lasers soll ein Schlitz in ein Blech geschnitten werden. Der Laser befindet sich an Position $L(3/5/3)$ und ist auf die Startposition $A(0/2/0)$ des Schlitzes ausgerichtet. Im Folgenden wird der Laser inderart gedreht, dass er einen geraden Schnitt von A zum Punkt $B(6/5/6)$ bewirkt.

   (a) Bestimmen Sie Cosinus des Winkels ϕ, um den der Laser auf seinem Weg zwischen A und B insgesamt geschwenkt wird.

   (b) Berechnen Sie die minimale Länge des Laserstrahls vom Laser bis zum Blech während des Schnitts.

8. Herbert, Manfred und Gertrud unterhalten sich über Preise von Schrauben, Dübeln und Nägeln.
   Dabei sagt Herbert, dass er für 6 Schrauben und 36 Nägel 1,20 € mehr bezahlt hat als für 12 Dübel.
   Manfred hat für 20 Schrauben das gleiche bezahlt wie für 40 Dübel.
   Gertrud hingegen hat für 30 Nägel und 7 Schrauben den gleichen Preis bezahlt wie für 20 Dübel.
   Bestimmen Sie anhand der Aussagen die Stückpreise für die Schrauben, Dübel und Nägel.

9. Testen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			U mit $U \neq \emptyset$ bildet einen Untervektorraum von V, wenn U bezüglich der (vektoriellen) Addition und (skalaren) Multiplikation abgeschlossen ist.
2			Das Produkt $A \cdot B$ zweier Matrizen kann nur gebildet werden, wenn die Zeilenzahl von A mit der Spaltenzahl von B übereinstimmt.
3			Ist V ein Vektorraum, M eine Teilmenge linear unabhängiger Vektoren und E ein Erzeugendensystem von V, dann lässt sich M durch Elemente aus E zu einer Basis von V ergänzen.
4			Bei einer Orthonormalbasis sind alle Vektoren normiert und paarweise orthogonal.
5			Jedes Orthonormalsystem bildet eine Basis.
6			Ein komplexer Vektorraum mit definiertem Skalarprodukt wird als unitärer Vektorraum bezeichnet.

Richtige Antworten geben 2 Punkte, für falsche wird ein Punkt abgezogen! Nicht angekreuzte Behauptungen geben 0 Punkte. Negative Gesamtpunkte werden als 0 Punkte gezählt.