Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Ein Himmelskörper H_1 bewegt sich auf einer Kreisbahn in einer Ebene, die senkrecht zur Richtung $(1, 1, 1)^T$ liegt und in der sich der Ursprung eines Koordinatensystems befindet.
Der Himmelskörper H_2 bewegt sich auf einer Kreisbahn um einen Fixstern in $(2, 1, 1)^T$. Die Ebene seiner Kreisbahn ist senkrecht zur Richtung $(1, -1, 1)^T$.

(a) Bestimmen Sie die Menge der Punkte, an denen H_1 und H_2 potentiell zusammenstoßen könnten.

(b) Welchen Radius muss die Kreisbahn von H_2 mindestens haben, damit ein Zusammenstoß möglich ist?

2.) Ein Laser, der sich im Ursprung eines Koordinatensystems befindet, soll ein Loch in ein Blech brennen. Das Blech, dessen Dicke vernachlässigt werden kann, ist unter anderem an den Punkten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

fixiert. Dabei entsteht ein Loch im Blech an der Stelle $(5, 4, 3)^T$.

(a) Unter welchem Winkel trifft der Laserstrahl auf das Blech?

(b) Wie weit steht der Laser von dem Blech entfernt?

3.) Untersuchen Sie jeweils, ob die 3 angegeben Funktionen in den angegebenen Intervallen linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = \cos(x), f_3(x) = \sin(x)$ im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(b) $g_1(x) = x^2 + 1, g_2(x) = x - 2, g_3(x) = 2x^2 + x$ im Bereich der reellen Zahlen

4.) Sei

$$M_c := \{f(x) \mid f'(17) = c\}$$

die Menge der Funktionen mit Tangentensteigung c an der Stelle $x = 17$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge M_c allgemein keinen Unterraum des Vektorraums der differenzierbaren Funktionen bildet.

(b) Für welches spezielle c bildet M_c jedoch sehr wohl einen Unterraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

5.) Orthonormieren Sie die folgenden 3 Vektoren mit dem Verfahren nach Gram-Schmidt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Achten Sie dabei darauf, dass unter der Menge der Vektoren der zu erzeugenden Orthonormalbasis eine Teilmenge existiert, die die gleiche Lineare Hülle erzeugt wie die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

6.) Testen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Richtigkeit.

Nr.	richtig	falsch	Aussage
1			n oder mehr linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis eines n-dimensionalen Vektorraums.
2			Ein Erzeugendensystem ist automatisch eine Basis.
3			Die Definition des Kreuz- bzw- Vektorproduktes bezieht sich ausschließlich auf den $\mathbb{R}^3$.
4			Die Größe eines Winkels zwischen Vektoren hängt vom verwendeten Skalarprodukt ab.
5			Für die Definition eines Vektorraums benötigt man die Definition eines Körpers.
6			Die reellen Zahlen bilden bzgl. der Division eine Gruppe.
7			Die Relation $\vec{x} \sim \vec{y} :=$ „$\vec{x}$ und $\vec{y}$ schließen einen Winkel von $60°$ ein“ bildet eine Äquivalenzrelation.
8			Normalformen gibt es nur für Hyperebenen.
9			Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist eindeutig durch ihren Normalenvektor beschrieben.
10			Die Norm des Vektorprodukts zweier Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ gibt den Flächeninhalt des von den Vektoren aufgespannten Paralellogramms an.

Richtige Antworten geben 1,5 Punkte, für falsche wird ein Punkt abgezogen! Nicht angekreuzte Behauptungen geben 0 Punkte. Negative Gesamtpunkte werden als 0 Punkte gezählt.