Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

und

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren
a) keine Lösung
b) unendlich viele Lösungen
c) eine eindeutige Lösung ?

2.) a) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 1 \\ x & + & y & = & 2 \end{array} \right\},$$

falls eine Lösung existiert.

b) Was bedeutet die Lösung, wenn man das Gleichungssystem wie folgt spatenweise interpretiert:

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie eine Skizze an.

c) Was bedeutet die Lösung, wenn man die beiden Zeilen des Gleichungssytems als Geraden in einer Ebene interpretiert? Fertigen Sie eine Skizze an.

3.) a) Bestimmen Sie die Normalform der Ebene E, die durch die Punkte

$$P_1 = (1,1,0), \qquad P_2 = (1,0,4), \qquad P_3 = (2,1,5)$$

bestimmt ist.

b) Wie groß ist der Abstand des Punktes $Q = (-8,8,11)$ von der Ebene E?

c) In welchem Punkt schneidet die Gerade, die durch Q senkrecht zur Ebene E verläuft, die Ebene E?

4.) Gegeben sei die Gerade

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine zweite Gerade g_2 an, deren Richtungsvektor senkrecht auf dem Richtungsvektor von g_1 steht und deren kürzester Abstand zu g_1 den Betrag 1 hat.

5.) Für Punkte $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ aus $(a, b), a, b \in \mathbb{R}^2$ ist folgende Verknüpfung definiert:

$$X \circ Y = (x_1 + y_1, x_2).$$

Bildet die Menge $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ bezüglich der Operation $\circ$ eine Gruppe? Bennenen und überprüfen Sie alle Gruppenaxiome.

6.) Sie sitzen auf einer Bank in einem Park. 2 m östlich und 2 m nördlich von Ihnen befindet sich die Mitte eines 1 m dicken Baumes. Können Sie den herrenlosen 500 Euro-Schein sehen, der 3 m östlich und 4 m nördlich von Ihnen auf dem Rasen liegt? Fertigen Sie eine Skizze an und begründen Sie Ihre Antwort.

7.) Ein Ballonfahrer steigt mit seinem Ballon 300 m auf und driftet dabei 500 m nach Westen. Anschließend dreht der Wind, der Ballon fliegt 1000 m nach Süden und stigt dabei nochmals 200 m auf. Das Sprechfunkgerät des Ballonfahrers reicht 1300 m weit. Kann er seine Ausgangsstation noch erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

8.) Die folgenden 3 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ stehen senkrecht aufeinander:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie einen Vektor, der senkrecht auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ steht.