Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Werte für λ, die die Gleichung

$$det(A - \lambda E) = 0$$

erfüllen (E ist die Einheitsmatrix).

(b) Lösen Sie für jedes in (a) erhaltene λ_i das Gleichungssystem

$$A - \lambda_i E = 0$$

und geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

2.) (a) Zeigen Sie, dass die drei Geraden

$$g_1 \;:\; \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

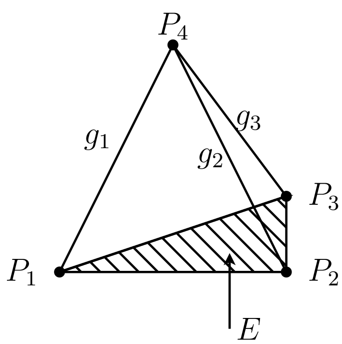
$$g_2 \;:\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_3 \;:\; \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zusammen mit der Ebene

$$E \;:\; x + z = 0$$

einen Tetraeder bilden (siehe Skizze).



(b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P_1 bis P_4.

3.) Für welche Werte von t hat das Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ tx & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & tz & = & 1 \end{array} \right\}$$

(a) keine, (b) genau eine und (c) unendlich viele Lösungen?

4.) (a) Zeigen Sie, dass die Menge M: $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2; x_1 \neq 0; x_2 \neq 0\}$ mit der Verknüpfung

$$x \circ y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \end{pmatrix}$$

eine Gruppe bildet.

(b) Welche Axiome sind verletzt, wenn man statt M die Menge $\mathbb{R}^2$ betrachtet?

5.) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_1(x) = 2x^2,\ \ f_2(x) = \frac{1}{1-x} \text{ und } f_3(x) = x^3$$

auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ linear unabhängig sind.

6.) Es sei $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor und $\vec{e}$ ein Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass gilt: $\|\vec{a}\| \geq |\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle|$.

Tipp: $\langle \vec{a}, \vec{e} \rangle \vec{e}$ ist die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{e}$. Benutzen Sie den Satz des Pythagoras.

7.) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in der angegebenen Reihenfolge nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

8.) Gegeben seien die Ebenen A bis D:

$$\begin{aligned}
A : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
B : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
C : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
D : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(a) Zwei dieser Ebenen sind identisch. Welche? Begründen Sie Ihre Aussage.

(b) Geben Sie die parameterlose Darstellung der unter (a) gefunden Ebene an.

(c) Berechnen Sie die Schnittgeraden mit den anderen beiden Ebenen, falls sie existieren.