Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I

1.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem a.) keine, b.) genau eine oder c.) unendlich viele Lösungen? Es ist der Gauss-Algorithmus zu benutzen!

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x - 2y + z &= 1 \\ -x + 4y + (3t^2 - 1)z &= (t - 1) \end{aligned}$$

2.) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \ .$$

(a) Geben Sie an für welche Werte von t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $\vec{x} = (2, 1, 1)^T$ erhalten.

(c) Können Sie auch eine Linearkombination für die Fälle von t angeben, bei denen die Spaltenvektoren keine Basis bilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

3.) Ein Bauherr möchte sein Haus mit einem Spitzdach oder Satteldach versehen. Leider baut er das Haus genau unter einer 14 Meter hohen Brücke, also muss er darauf achten, dass das Dach einen Mindestabstand von zwei Metern zur Brücke hat. Das Dach beginnt in einer Höhe von 6 Metern und in einem gedachten Koordinatensystem gibt der Bauherr die Koordinaten des Daches, das er sich vorstellt, wiefolgt an:

> „Die eine Dachfläche liegt in einer Ebene, die durch die Punkte $(0, 0, 6)$ und $(10, 0, 6)$, sowie den Richtungsvektor $(0, 1, 1)$ beschrieben wird. Die zweite Dachfläche liegt in einer Ebene, die durch die Punkte $(10, 5, 11)$ und $(0, 10, 6)$ und den Richtungsvektor $(1, 0, 0)$ beschrieben wird.“

Die dritte Koordinate bezeichnet dabei die Höhe über dem Boden. Wie groß ist der kleinste Abstand des Daches von der Brücke, und kann der Bauherr sein Dach unter Berücksichtigung des einzuhaltenden Abstands zur Brücke so bauen?

4.) Geben Sie sämtliche Gruppenaxiome an und überprüfen Sie, ob jede dieser Eigenschaften für die Menge $\mathbb{R}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = a + \frac{b}{2},\ \ a, b \in \mathbb{R}$$

erfüllt sind.

Bildet die Menge $\mathbb{R}$ mit dieser Verknüpfung $\circ$ eine kommutative Gruppe?

Bildet die Menge $\mathbb{R}$ mit dieser Verknüpfung $\circ$ überhaupt eine Gruppe?

5.) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in der angegebenen Reihenfolge nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

6.) Zeigen Sie, dass für $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ durch

$$< x, y >= x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert ist.

7.) Gegeben sei die folgende Ebene in Parameterdarstellung

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Stellen Sie die Hesse-Normalform zu dieser Ebene auf.

(b) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene zum Koordinatenursprung, sowie den Abstand des Punktes $P = (2, 2, 2)$ zur Ebene.

8.) Die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{a}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind gegeben durch

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_{n+1} = (\vec{a}_n \times \vec{b}) \times \vec{b}$$

Man berechne die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$, gebe eine explizite Formel für $\vec{a}_n$ an und beweise sie durch vollständige Induktion.