Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 27.6.2008

1.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ bildet

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -x^2 + 2x + 3 \\ p_2(x) &= 2x^2 + x + 3 \\ p_3(x) &= tx^2 + x + t \end{aligned}$$

eine Basis von P_2 (des Raums der Polynome vom Grad ≤ 2)?

2.) Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ keine, genau eine oder mehrere Lösungen?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}.$$

3.) (a) Geben Sie die Gruppenaxiome an.

(b) Zeigen Sie, dass $G = \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \oplus y = (x+y)^2$ keine Gruppe ist.

(c) Zeigen Sie, dass $G = \mathbb{R}$ mit der Verknüpfung $x \oplus y = x^2 + y^2$ keine Gruppe ist.

4.) Schneiden Sie den Kegel $z^2 = x^2+y^2$ mit der Ebene $z = 2x+3$. Geben Sie die Kegelschnittgleichung an. Um welche Art von Kegelschnitt handelt es sich? Begründen Sie Ihr Ergebnis. Wo liegt der Mittelpunkt des Kegelschnitts?

5.) Eine Gerade

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

schneidet die beiden Ebenen $E_1 : x + y - 2z = 2$ und $E_2 : 2x - y + z = -1$. Berechnen Sie die Entfernung der beiden Schnittpunkte.

6.) Geben Sie zwei Vektoren an, die senkrecht auf dem Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sowie senkrecht aufeinander stehen. Geben Sie genau an, durch welche Überlegungen Sie auf Ihr Ergebnis gekommen sind.

7.) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Iterationsvorschrift $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n \times \vec{b} \ \forall n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:

$$\vec{x}_{n+4} = \vec{x}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8.) Folgende Regeln gelten für das Kreuz- bzw. für das Spatprodukt:

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

(b) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

(d) $\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{b} \times \vec{c}, \vec{a} \rangle$

Beweisen Sie mit den Regeln (a)-(d):

(a) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

(b) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

(c) $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$

9.) Sie stehen auf einer Wiese. 10 m westlich von Ihnen steht ein Zaunpfahl. Ein weiterer Zaunpfahl steht 20 m südlich von Ihnen. Zwischen beiden Pfählen ist ein Elektrozaun gespannt. Sie gehen 10 Schritte nach Süden und weitere 6 Schritte nach Osten. Ihre Aufgabe ist es jetzt, soviele Schritte wie möglich mit verbundenden Augen nach Westen zu gehen, ohne sich einen Elektroschock zu holen. Wieviele Schritte trauen Sie sich (1 Schritt = 1 m)? Begründen Sie Ihre Ergebnis.

10.) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h mit folgenden Eigenschaften:

- h steht senkrecht zur Geraden
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- h liegt in der Ebene $E : x + y = 4$.
- Der Punkt
$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ y_0 \\ -2 \end{pmatrix}$$
liegt auf der Geraden h (y_0 beliebig).