Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 7.2.2008

1.) Orthonormieren Sie nach dem Gram-Schmidt-Verfahren:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.) Gegeben sind die Geradenschar $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ 2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E : 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 7$.

(a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die zugehörigen Geraden g_a parallel zur Ebene E sind.

(b) Zeigen Sie, dass keine Gerade der Geradenschar g_a orthogonal zu E ist.

(c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_2, die die Geraden g_{-1} und g_1 enthält.

3.) Untersuchen Sie, ob die ganzen Zahlen mit folgender Verknüpfung eine Gruppe bilden:

$$z_1 \circ z_2 = z_1 + z_2 - 1$$

4.) Durch welche der folgenden Gleichungen werden Skalarprodukte im $\mathbb{R}^2$ definiert?
(Beweise!)

(a) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1^2 + x_2 y_1 y_2$

(b) $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 2x_1 y_1 + 2x_2 y_2$

5.) Man bestimme alle Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6.) Wie lautet die Gleichung einer Geraden im $\mathbb{R}^2$, die durch den Punkt $P = (1,1)$ geht und deren kürzeste Abstände zu den Punkten $Q_1 = (1,2)$ und $Q_2 = (-2,-1)$ gleich groß sind? Fertigen Sie eine Skizze an. Die Angabe einer der beiden möglichen Lösungen ist ausreichend.

7.) Es sei P[0,1] der reelle lineare Raum der auf dem Intervall [0,1] definierten Polynome. Prüfen Sie, ob die folgenden Polynome linear abhängig sind:
$p_1(x) = 2x^3 + 3x^2 - x$, $p_2(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x$, $p_3(x) = x^3 + 4x^2 + 3x$

Welche Dimension hat der von diesen Polynomen aufgespannte Teilraum? (mit Erläuterung!)
Normieren Sie $p_4(x) = 3x^2 + 2$ bzgl. des Skalarprodukts

$$< f, g > = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

8.) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \vec{b_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2-t \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(a) Für welches t bilden $\vec{a_t}, \vec{b_t}$ und $\vec{c}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Berechnen Sie die Koordinaten von $\vec{d}$ bzgl. der Basisvektoren $\vec{a_3}, \vec{b_3}, \vec{c}$ mit $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.) Gegeben sind zwei Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ durch
$U_1 = L(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix})$ und $U_2 = L(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

(a) Zeigen Sie, dass U_1 und U_2 verschieden sind.

(b) Ermitteln Sie eine Basis der Schnittmenge $U_1 \cap U_2$.

10.) Gegeben ist eine Kugel mit dem Mittelpunkt M(2,-5,3) und dem Radius r=4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Punkte innerhalb dieser Kugel, außerhalb dieser Kugel oder auf der Kugeloberfläche liegen.
$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$