Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I 28.6.2007

1.) Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A' des Punktes

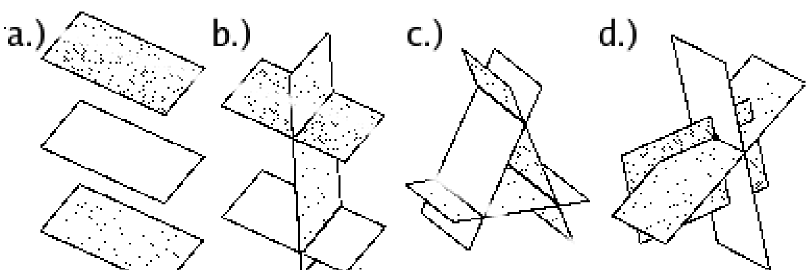
$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

an der Geraden

$$g : X = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2.) Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \oplus y := x + y - xy$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}\backslash\{1\}, \oplus)$ eine kommutative Gruppe ist.

3.) Die folgende Zeichnung verdeutlicht 4 mögliche Lagen dreier Ebenen zueinander. Geben Sie für jeden Fall jeweils ein Beispiel von 3 parameterlosen Gleichungen an.



4.) Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{b}, \vec{c}$ an, die senkrecht auf dem Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

stehen. Orthonormieren Sie die beiden Vektoren.

5.) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y - tz = 9; \quad x, y, z \in \mathbb{R}?$$

Bestimmen Sie für diese Fälle jeweils den Abstand der Geraden g von der Ebenen E.

6.) Bestimmen Sie die Lösungen $\vec{x}$ der Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ für

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad i)\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad ii)\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

falls es überhaupt Lösungen gibt.

7.) Wo liegen alle Punkte, deren Entfernungen von $F = (-2, -1)$ gleich sind den Abständen von der Geraden $x_1 + 8 = 0$. Geben Sie sowohl die Gleichung als auch den Namen und die Lage der geometrischen Form an.

8.) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_1(x) = (x+1)^{-2},\ f_2(x) = x^2 - x + 1,\ f_3(x) = \frac{2^x}{3}$$

im Intervall $[0, 4]$ linear unabhängig sind.