Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 26.1.2007

1.) Ein Ballonfahrer steigt mit seinem Ballon 300 m auf und driftet dabei 400 m nach Westen. Anschließend dreht der Wind, der Ballon fliegt 1200 m nach Süden und behält dabei seine Höhe. Das Sprechfunkgerät des Ballonfahrers reicht 1500 m weit. Kann er seine Ausgangsstation noch erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

2.) Sind die beiden Geraden

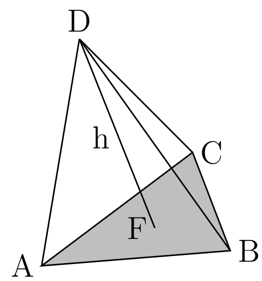
$$
\begin{aligned}
g_1 \quad &: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
g_2 \quad &: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

windschief? Berechnen Sie gegebenenfalls den minimalen Abstand zwischen beiden Geraden.

3.) Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Dreieck ABC und die Spitze D. Die Gerade h geht durch D und ist senkrecht zur Grundfläche. Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

den Fußpunkt F von h und die Höhe der Pyramide.



4.) Orthonormieren Sie die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

nach dem Verfahren von Gram-Schmidt, falls das möglich ist. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis. Bildet Ihr Resultat

(a) eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$?

(b) eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^4$?

(c) ein Orthonormalsystem des $\mathbb{R}^4$?

5.) Bildet der Raum $\mathbb{R}^3$ zusammen mit der Verknüpfung

$$a \circ b = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_2 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}$$

eine Gruppe? Begründen Sie Ihre Antwort. Schränken Sie gegebenenfalls die Menge $\mathbb{R}^3$ so ein, dass ihre Elemente mit der Verknüpfung $a \circ b$ eine Gruppe bilden.

6.) Die Folge $\vec{x}_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \vec{x}_0 &= \begin{pmatrix} b \\ c-a \\ -b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \\ \vec{x}_{n+1} &= \vec{x}_n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Glieder dieser Folge sich durch

$$\vec{x}_n = \begin{cases} (-2)^{\frac{n}{2}} \cdot \begin{pmatrix} b \\ c-a \\ -b \end{pmatrix}; & n \text{ gerade} \\ (-2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} c-a \\ -2b \\ a-c \end{pmatrix}; & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

berechnen lassen.

7.) Im zweidimensionalen komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^2$ ist das Standardskalarprodukt folgendermaßen definiert

$$< \vec{v}, \vec{w} > = < \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} > := v_1 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2}$$

Berechnen Sie zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2i \\ 3i \end{pmatrix}$ die Normen der beiden Vektoren, das Skalarprodukt der beiden Vektoren und $< \vec{v}, \overline{\vec{w}} >$.

8.) Zeigen Sie jeweils durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die folgenden Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ keine Skalarprodukte sind:

$$f_1(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_1$$

$$f_2(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_1 + 2$$

$$f_3(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_2 + 2 x_2 y_1$$

$$f_4(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$$

$$f_5(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1 + x_2$$

9.) Sei W die lineare Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^4$. $W^\perp$ ist das orthogonale Komplement zu W. Schreiben Sie $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ als Summe $w = w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^\perp$.

10.) Für welche Werte von a sind die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -a \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

linear abhängig? Liegt in diesen Fällen der Vektor

$$\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

in dem durch $\vec{v}_1$ bis $\vec{v}_3$ aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^3$?