1. Gegeben sind die 3 Punkte $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (3, 2, 2)$ und ein Vektor
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Man bestimme die Gleichung der Ebene durch den Punkt A, die senkrecht zum Vektor $\vec{n}$ steht. Ausserdem bestimme man die Gleichung der Geraden durch die Punkte B und C. Man bestimme den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

2. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 4 \\ x & - & 3y & = & -5 \\ 5x & + & y & = & 7 \end{array}\right\}$$

falls eine Lösung existiert. Welche Bedeutung hat in diesem Beispiel der Wert der Determinanten

$$\left|\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & 7 \end{array}\right|$$

für die Lösbarkeit des Gleichungssystem? Wie ändert sich die Lösung dieses Gleichungssystems, wenn man die Zahl 7 durch eine 6 ersetzt?

3. Ist $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche (d.h.kommutative) Gruppe?

4. Man bezeichnet zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ als parallel ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), wenn eine reelle Zahl $\alpha \neq 0$ existiert mit $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$. Man zeige, dass die Relation $\parallel$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^n$ ist.

5. Gegeben sind die Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Außerdem gilt:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n \times \vec{b} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass gilt

$$\vec{x}_{n+4} = \vec{x}_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

6. Bilden die 3 Vektoren

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

eine Basis im $\mathbb{R}^3$? Man bilde daraus gegebenenfalls eine Orthonormalbasis nach dem Gram-Schmidt-Verfahren.

7. Untersuchen sie die Funktionen $\{\sin x,\ \sin^2 x,\ \sin 2x\}$ auf ihre lineare Unabhängigkeit auf dem Interval $[0, 2\pi]$.
   Tipp: $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

8. Man betrachte die Menge $\mathbb{R}[X]$ der reellen Polynome. Für $p,\ q\ \in\ \mathbb{R}[X]$ sei
$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$$
definiert. Zeigen Sie, dass hier für alle $p, q, r \in \mathbb{R}[X]$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ die Vorrausetzungen für ein Skalarprodukt erfüllt sind.