Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH Jülich

Aufgaben zur Linearen Algebra I 6.7.2006

1. Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises mit der Gleichung $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$

2. Es sei Pol_n der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n mit reellen Koeffizienten.

   (a) Zeigen Sie, dass $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$ eine Basis des Pol_3 ist.

   (b) Berechnen Sie die Darstellung des Polynoms $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in Pol_3$ in der Basis B.

3. Es seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ darauf, ob sie Skalarprodukte sind.

   (a) $f(x, y) = 4x_1y_1 - 4x_1y_3$

   (b) $f(x, y) = 7x_1y_1 + 6x_2y_2 + 2x_3y_3 + 1$

4. Gegeben ist die Pyramide PQRS mit den Ecken

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist die Höhe der Pyramide über der Grundfläche (PQR)?

5. Was folgt für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus folgenden Aussagen?

   (a) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ **und** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

   (b) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$.

   (c) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$.

6. Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

   (a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

   (b) Bestimmen Sie aus V nach dem Gram-Schmidtschen Verfahren ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

7. Für welche Werte des reellen Parameters p hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & pz & = & 1 \\ x & + & py & + & z & = & p \\ px & + & y & + & z & = & p^2 \end{array}$$

(a) eine eindeutige Lösung?

(b) unendliche viele Lösungen?

(c) keine Lösung?

Geben Sie im Fall (b) die Lösungen an.

8. Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{8} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie den Vektor $\vec{a}$ als Summe

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$$

dar, wobei $\vec{a}_1 \| \vec{b}$ und $\vec{a}_2 \perp \vec{b}$ gelten muss.