Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra 1 26.1.2006

1.) Ein Eskimo startet eine Wanderung an einem bestimmten Ort in Grönland. Er geht 10 km in südliche Richtung und anschließend $10 \cdot \sqrt{2}$ km in südwestliche Richtung. Danach wandert er 10 km nach Osten. Wieviel km ist er jetzt etwa von seinem Iglu entfernt?

2.) Berechnen Sie die Schnittgerade sowie den Winkel der beiden Ebenen E_i, wobei

- $E_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- E_2 gegeben ist durch die drei Punkte $P_1 = (2,1,2)$, $P_2 = (0,0,7)$, $P_3 = (3,0,3)$.

3.) Berechnen Sie in Abhängigkeit des Parameters k die kleinstmögliche Entfernung zwischen zwei Flugobjekten, deren geradlinige Flugbahnen folgendermaßen gegeben sind:

1.) Abflugpunkt $P = (10, 10, 5)$, Flugrichtung $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$.

2.) Abflugpunkt $P = (0, 8, 15)$, Endpunkt $E = (0, 0, 7)$.

4.) Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$$

Was bedeutet diese Gleichung geometrisch?

5.) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises: $x^2+y^2+5x-7y+\frac{5}{2}=0$. Bestimmen Sie die Gleichung der Ellipse, die den Mittelpunkt (3,4) und die Halbachsen $a=2$ und $b=1$ hat.

6.) Zeigen Sie, dass die folgende Rechenvorschrift die Voraussetzungen für ein Skalarprodukt erfüllt:

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ mit } f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right) = 2a_1b_1 + 2a_2b_2 + 2a_3b_3 - a_1b_3 - a_3b_1$$

7.) Orthonormieren Sie die Vektoren nach Gram-Schmidt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.) $\mathbb{Z}$ bezeichne die ganzen Zahlen und $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Addition eine Gruppe bildet.

(b) $\mathbb{Z}$ mit folgender Addition keine Gruppe bildet: $a \circ b := \mathrm{mod}(a + b, n)$.

(c) $\mathbb{Z}_n$ mit folgender Addition eine Gruppe bildet: $a \circ b := \mathrm{mod}(a + b, n)$.

(d) $\mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$ mit der folgenden Multiplikation keine Gruppe bildet:
$a \circ b := \mathrm{mod}(a \cdot b, n)$.

9.) Für welche $a \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig bzw. linear abhängig? Geben Sie jeweils den aufgespannten Unterraum an.

10.) Geben Sie eine Basis des Teilraums der Polynome an, der von

$$p_1(x) = 1 + 2x + 3x^2$$
$$p_2(x) = 2 + x - x^2$$
$$p_3(x) = 1 - x - 4x^2$$

aufgespannt wird. Sind $p_4(x) = 7 + 5x$ bzw. $p_5(x) = 1 + x$ Elemente des Teilraums?