Dr. H.J. Pflug, ReZe/RWTH

Klausur zur Linearen Algebra I 23.9.2005

Punkte

Aufgabe 1: Gegeben sind 2 Punkte $A = (1, 1, 3)$ und $B = (3, -1, 4)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte und den kürzesten Abstand dieser Geraden vom Nullpunkt. 12

Aufgabe 2: Gegeben Sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie A^n an. Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Gleichung der Winkelhalbierenden der beiden Vektoren 12

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ \sqrt{7} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Gegeben ist das System von 3 Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Stellen Sie fest, ob die Vektoren linear unabhängig sind.
b) Bestimmen Sie aus V ein Orthonormalsystem, falls dies möglich ist.

Aufgabe 5: Für welches $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende lineare Gleichungssystem *keine, genau eine* und *mehrere* Lösugen? Geben Sie gegebenenfalls sämtliche Lösungen an. 12

$$\left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = a \end{array} \right\}$$

Aufgabe 6: Der lineare Raum der Polynome vom Gerade $\leq n$ ist gegeben durch

$$P_n = \{p; p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n, a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n.$$

Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_k$$

ein Skalarprodukt auf P_n gegeben ist.

Aufgabe 7:

a) Welche (geometrische) Bedingung muss eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ erfüllen, um Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ zu sein. Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Benutzen Sie zwei Geraden aus a), um folgenden Satz zu widerlegen: Die Vereinigungsmenge zweier Unterräume ist wieder ein Unterraum.

Aufgabe 8:
Sind die Funktionen

$$f_1(x) = \sqrt{x}; \qquad f_2(x) = 2^x; \qquad f_3(x) = \frac{1}{x+1}$$

im Intervall $[0, 4]$ linear unabhängig?

Summe der Punkte: **100**