FH Jülich, ZAM/FZJ, ReZe/RWTH Aachen WS 2004/05 Punkte

Klausur zu "Lineare Algebra 1"

1) Gegeben sind die 2 Punkte $A = (1, 1, 3)$ und $B = (3, -1, 4)$. Man bestimme die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte und den kürzesten Abstand dieser Geraden vom Nullpunkt. 9

2) a) Bestimmen Sie die Normalform der Ebene E, die durch die Punkte

$$P_1 = (1, 1, 0), \qquad P_2 = (1, 0, 4), \qquad P_3 = (2, 1, 5)$$

bestimmt ist. 6

b) Wie groß ist der Abstand des Punktes $Q = (-8, 8, 11)$ von der Ebene? 5

c) In welchem Punkt schneidet die Gerade, die durch Q senkrecht zur Ebene verläuft, die Ebene aus Teil a) ? 5

3) a) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 4 \\ x & - & 3y & = & -5 \\ 5x & + & y & = & 7 \end{array} \right\},$$

falls eine Lösung existiert. 5

b) Man stelle das lineare Gleichungssystem aus Teil a) als Vektorgleichung mit den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}?$$

dar. Welche Bedeutung hat dann in diesem Beispiel die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit dieser Vektoren? 4

c) Welche Bedeutung hat dabei die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}?$$

3

d) Wie ändern sich die Ergebnisse in a), b) und c), wenn man die Zahl 7 durch eine 6 ersetzt? 3

4) Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n \times \vec{b} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, dass gilt 13

$$\vec{x}_{n+4} = \vec{x}_n \quad \forall\, n \ \in \ \mathbb{N}.$$

5) Man berechne $r_5(3^{17})$, den Rest $\in \mathbb{N}$ bei der Division von 3^{17} durch 5. 10

6) Ist $\mathbb{N}_{\geq 0}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche (d.h. kommutative) Gruppe ? 11

7) Man stelle fest, ob die Menge der Funktionen

$$\{\sin x,\ \cos x,\ \sin^2 x\}$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$ linear unabhängig ist. 12

8) Die folgenden 3 Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

spannen einen dreidimensionalen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf: Man bilde daraus eine Orthonormalbasis von U. Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^\perp$? 14

100