Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Sina Mattfeldt

Übungsblatt 13

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Welche der im folgenden genannten Abbildungen sind quadratische Formen? Stellen Sie gegebenenfalls die zugehörige (symmetrische) Matrix A auf.
Ist A positiv definit, negativ definit oder indefinit?

(a) $f(x) = x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$

(b) $f(x) = x_1^2 - 6x_2^2 + x_1 - 5x_2 + 4$

(c) $f(x) = x_1x_2 + x_3x_4 - 20x_5$

(d) $f(x) = x_1^2 - x_3^2 + x_1x_4$

Aufgabe 2

Die Matrix A habe folgende Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

wobei $a \in \{-2, 2\}$ und $b \in \{-1, 0, 1\}$. Für welche a, b ist die Matrix A

(a) positiv definit,

(b) negativ definit,

(c) indefinit?

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass sämtliche Diagonalelemente einer positiv definiten Matrix A positiv sind.

Tipp: Gehen Sie von der quadratischen Form aus und setzen Sie $x = e_i$. Müssen die anderen Matrixelemente auch positiv sein?

Aufgabe 4

Welche der folgenden Matrizen ist positiv definit, negativ definit, positiv semidefinit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Gegeben seien die beiden quadratischen Formen:

(a) $f(x) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$

(b) $f(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + x_1x_4 - 3x_2x_1 + x_2x_4 - 2x_3x_1 + x_3x_2 + 4x_3^2 - 3x_3x_4 + 2x_4x_1 - 5x_4x_2 + x_4x_3 - 5x_4^2$

Ermitteln Sie jeweils die zugehörige symmetrische Koeffizientenmatrix A.

Aufgabe 6

Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \; f(x,y) = (4x^2 + y^2) \cdot e^{-x^2-4y^2}$ wurden schon fünf potentielle lokale Extrema, die die Gleichung $\nabla f(x,y) = 0$ erfüllen, gefunden und die Hessematrix $\nabla^2 f$ bestimmt.

$$\begin{cases} x_1 = (0,0)^T \\ x_{2,3} = (0, \pm\frac{1}{2})^T \\ x_{4,5} = (\pm 1, 0)^T \end{cases}$$

$$\nabla^2 f = e^{-x^2-4y^2} \cdot \begin{pmatrix} 8 - 32x^2 + 2(4x^2+y^2)\cdot(2x^2-1) & 16xy(4x^2+y^2) - 68xy \\ 16xy(4x^2+y^2) - 68xy & 2 - 32y^2 + 8(4x^2+y^2)\cdot(8y^2-1) \end{pmatrix}$$

Ist die Hessematrix positiv bzw. negativ definit, so ist der Punkt ein lokales Minimum bzw. Maximum. Ist die Hessematrix aber indefinit, so ist der Punkt ein Sattelpunkt. Bestimmen Sie damit, um welche Art von Punkten es sich bei $x_i, i \in 1,2,3,4,5$ handelt.

Aufgabe 7

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Zu jeder spd-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert eine spd-Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A = B^2$.

Aufgabe 8

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist symmetrisch positiv definit(spd) genau dann, wenn A^{-1} spd ist.

(b) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind symmetrisch positiv definit. Dann ist auch ABA symmetrisch positiv definit.