

Aufgaben zur Veranstaltung Lineare Algebra 2

Jacqueline Gottowik, Matthias Grajewski, Sina Mattfeldt

Übungsblatt 11

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die QR -Zerlegung zu

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Bei welchen Werten a, b hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

- (a) zwei verschiedene reelle Eigenwerte?
- (b) einen (doppelten) reellen Eigenwert?
- (c) keinen reellen Eigenwert?

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen

$$(a) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b) B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie auch eventuelle komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren. Ein komplexes Gleichungssystem können Sie wie ein reelles Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren lösen.

Aufgabe 4

Wie lautet die QR -Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}?$$

Lösen Sie anschließend mit dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (1, 2)^\top$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Wie lautet die QR -Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} ?$$

Lösen Sie anschließend mit dieser Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (2, 3)^\top$.

Aufgabe 7

Gegeben sind

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t & 2t - 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass der Vektor x_t Eigenvektor der Matrix A_t ist. Wie lautet der zugehörige Eigenwert? Bestimmen Sie auch den zweiten Eigenwert.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$