Jacqueline Gottowik

Übungsblatt 7

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, 4x_2)$

(a) Zeigen Sie: f ist linear.

(b) Bestimmen Sie den Kern(f) und geben Sie die $dim(Ker(f))$ an.

(c) Berechnen Sie die $dim(Bild(f))$ bzw. $rg(f)$ und bestimmen Sie das $Bild(f)$.

(d) Ist die Abbildung f injektiv oder surjektiv?

Aufgabe 2

Ein lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

(a) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

(b) Bestimmen Sie $f^{-1}(x, y, z)$.

Aufgabe 3

Es sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, die durch

$$T(x, y, z) = (-x + 2y + z, x + y, -2x + y + z)$$

definiert ist. Geben Sie eine Basis und die Dimension des Bildes U von T an.

Aufgabe 4

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} x^n & \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Schauen Sie sich den Videoausschnitt Kap_5_Teil2.mp4 zu Kapitel 5 des Skriptes, welche Sie im Ilias unter "Vorlesungsvideos → Kapitel 5 - Determinanten" finden, an.

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) mit der Regel von Sarrus.

(b) mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(c) mit dem Entwicklungssatz von Laplace.

Aufgabe 7

Eine spezielle $n \times n$-Tridiagonalmatrix T_n ist gegeben durch:

$$t_{i,j} = \begin{cases} 2 & i = j \\ 1 & i = j-1 \text{ oder } j = i-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Schreiben Sie die Matrix für $n = 5$ explizit auf.

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinanten $D_n = \det(T_n)$ gilt:

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \text{ mit } D_0 = 1.$$

(c) Berechnen Sie D_n mit Teil b) für $n = 2, 3, 4, 5$. Geben Sie eine explizite (nicht rekursive) Formel für D_n an und beweisen Sie sie.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Determinante der beiden folgenden Matrizen nach einer beliebigen Methode. Es gibt in beiden Fällen eine sehr schnelle Methode.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{pmatrix}$