Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2022/23

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 14 17.01.2024

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2, 3, 1)$ auf die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von V zur Ebene.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt eine Orthonormalbasis bilden: $v_1 = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}, \text{mit } t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie auf P_2 das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

Konstruieren Sie aus der Basis $(1, x, x^2)$ eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 4

Geben Sie eine orthonormale Basis des Unterraums W von $\mathbb{C}^3$ an, der durch

$$v_1 = (1; i; 0)^T \quad \text{und} \quad v_2 = (1; 2; 1 - i)^T$$

aufgespannt wird. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.

Hinweis: $< z, w >= z \cdot \bar{w}$

Freiwillige Hausaufgaben - Wiederholungsaufgaben (keine Abgabe!)

Aufgabe 5

Der Rennflieger Rudi möchte möglichst schnell von seinem Startpunkt $S = (0/1/8)$ aus den Zielpunkt $Z = (4/7/0)$ erreichen. Er weiß, dass sein Kurs optimal ist, wenn der Kurs den gleichen Abstand zu zwei Hindernissen $H_1 = (1/2/2)$ und $H_2 = (3/6/6)$ besitzt. Kann Rudi seinen Kurs entlang einer Geraden wählen?

Hinweis: Bestimmen sie zunächst eine Ebene der Punkte mit gleichem Abstand zu den Hindernissen.

Aufgabe 6

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4t \\ 2 & 2 & 4t \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

(a) Geben Sie an, für welche t die Spaltenvektoren der Matrix eine Basis im $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie eine Linearkombination dieser Basisvektoren (abhängig von t) an, sodass Sie den Vektor $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten.

Aufgabe 7

Sind folgende Funktionsmengen auf dem Intervall $[-2; 2]$ linear unabhängig?

$$M_1 = \{\sinh(x), e^x, e^{2-x}\} \qquad M_2 = \{\sinh(x), e^x, e^{-2x}\}$$

Aufgabe 8

Gegeben ist ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$U = \{x; x \in \mathbb{R}^n, \langle a, x \rangle = 0\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist.