Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2023/24

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 12 03.01.2024

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass durch $\langle a,b\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_i\overline{b_i}$ mit $a = (a_i)_{i=1}^n$ und $b = (b_i)_{i=1}^n$, $a, b \in \mathbb{C}^n$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ definiert ist.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Standardnorm des Vektors h aus dem Vektorraum P_2 der Polynome vom Grad ≤ 2 bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)dx$$

für $h(x) = 4x^2 + 6x + 3$.

Aufgabe 3

Es seien $x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{-\sqrt{5}}\right)^T$ und $y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)^T$. Zeigen Sie, dass x und y bezüglich des Skalarprodukts $\langle x,y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ orthogonal sind, bezüglich des Standardskalarprodukts aber nicht.

Aufgabe 4

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Gibt es ein t, für das diese 3 Vektoren orthogonal zueinander werden?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

p und q seien reelle Polynome vom Grad ≤ 2. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q\rangle = \sum_{k=0}^{2} p(x_k) \cdot q(x_k)$$

wobei x_0, x_1, x_2 paarweise verschiedene reelle Zahlen sind, ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum P_2 der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 gegeben ist.

Beispiel: $p = 5x + 2$, $q = x^2 + 3$; wähle $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
$\Rightarrow \langle p, q\rangle = 2 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 12 \cdot 7 = 118$

Aufgabe 6

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aller reellen 2×2-Matrizen. Seien $U, V \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass durch $\langle U, V\rangle = u_1v_1 + u_2v_3 + u_3v_2 + u_4v_4$ **kein** Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ definiert wird.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie mit der Projektionsformel im unitären Raum $\mathbb{C}^2$ die Projektion von $x = (1 + i; 2 + i)^T$ auf $y = (1 - i; -1)^T$.

Aufgabe 8

Berechnen Sie das Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

für folgende Vektoren aus dem P_3:

(a) $p(x) = 1 - x + x^2 + 5x^3$ und $q(x) = x - 3x^2$

(b) $p(x) = x - 5x^3$ und $q(x) = 2 + 8x^2$