

Übungsblatt 11 - Weihnachtsspecial

13.12.2023

Aufgabe 1

In der Weihnachtsbäckerei laufen die Vorbereitungen auf Hochtouren. Die fleißigen Weihnachts-elfen backen wie in jedem Jahr drei verschiedene Plätzchensorten. Die Rezepte dieser sind aber nur der Backelfe bekannt und sie hält diese streng geheim. Weihnachtselfe Willi versucht seit Jahren die Rezepte herauszufinden und kennt von zwei der drei Rezepten zumindest schon die unterschiedlichen Verhältnisse der drei Grundzutaten. Beim dritten Rezept kommt er einfach nicht an den Anteil von Zucker.

- Plätzchen 1: 3 Einheiten Mehl, 3 Einheiten Margarine, 3 Einheit Zucker
- Plätzchen 2: 1 Einheiten Mehl, 3 Einheiten Margarine, 5 Einheiten Zucker
- Plätzchen 3: 3 Einheiten Mehl, 4 Einheiten Margarine, a Einheit Zucker

Willi findet den Einkaufszettel vom letzten Jahr und kann diesem entnehmen, dass im letzten Jahr insgesamt 26 Einheiten Mehl, 39 Einheiten Margarine und 39 Einheiten Zucker gekauft wurden. Bis auf 3 Einheiten Zucker - so hat er beobachtet - wurde auch alles restlos verbacken. Als die Backelfe auf der Weihnachtsfeier ausgelassen feiert, sieht Willi seine Chance. Er fragt sie nach dem Anteil von Zucker für Plätzchensorte 3. Backelfe Berta lacht und sagt: "So einfach mache ich es dir nicht. Es braucht entweder 3 oder 5 Einheiten Zucker für Plätzchensorte 3. Das musst du nun selbst herausfinden." Helfen Sie Willi und finden Sie heraus, welche Aussage für a stimmt. Wie viele Einheiten der Plätzchen $p = (p_1, p_2, p_3)^T$ wurden im letzten Jahr gebacken? Setzen Sie daraus den Punkt $W_1 = (p_2; a)$ zusammen und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Schnittpunkt $x_s = (x_{s1}, x_{s2}, x_{s3})^T$ der folgenden drei Ebenen:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3$$

Der Lösungspunkt W_2 berechnet sich wie folgt: $W_2 = (x_{s3}; -x_{s1})$. Tragen Sie den Punkt im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungen x der Gleichung $a \times x = b$ für $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Stellen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit eines Parameters als Geradengleichung dar und berechnen Sie daraus eine konkrete Lösung, für die $x_3 = 8$ gilt. Erstellen Sie daraus den Punkt $W_3 = (x_1; x_2)$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die folgenden Determinanten:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(b) \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Setzen Sie aus den beiden Lösungen den Punkt $W_4 = (\det(a); \det(b))$ zusammen und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 5

Der Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ habe die Koordinaten $(5, 5, 10)^T$ bezüglich der kanonischen Basis. Welche Koordinaten hat er bezüglich der Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Zeigen Sie zuerst, dass es sich um eine Basis handelt. Basteln Sie dann den Punkt $W_5 = (-x_1; x_3)$ aus den berechneten Koordinaten.

Aufgabe 6

Es seien $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ und $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ Polynome aus dem Raum P_2 mit $b_i, a_i \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ ein Skalarprodukt auf P_2 definiert ist.

(b) Berechnen Sie mit Teil (a) den Cosinus des Winkels zwischen den Vektoren

(a) $p(x) = -1 + 5x + 2x^2$ und $q(x) = 2 + 4x - 9x^2$

(b) $p(x) = -x^2 + x + 2$ und $q(x) = 2x^2 - 2x - 4$

(c) $p(x) = 3x + 3$ und $q(x) = x + 1$

Der Winkel ist wie bei den Vektoren aus dem Vektorraum \mathbb{R}^n definiert, wobei das hier gegebene Skalarprodukt und die daraus induzierte Norm zu verwenden sind. Erstellen Sie aus den berechneten Winkeln den Punkt $W_6 = (\cos(\alpha_b); \cos(\alpha_c))$ und tragen Sie ihn im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie den $\cos(\alpha)$ zwischen den Ebenen

$$(a) 3x_1 + 4x_3 = 7 \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -6x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 1$$

Berechnen Sie den Punkt $W_7 = (\frac{21\cos(\alpha_a)}{2}, \cos(\alpha_b))$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die orthogonale Projektion von d auf c .

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 23/4 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Erstellen Sie den Ortsvektor der orthogonalen Projektion gehörigen Punkt W_8 und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 9

Gegeben sind drei Punkte in Abhängigkeit eines Parameters $\beta \in \mathbb{R}$.

$$(-2; \beta - 2), (-1; \beta - 1), (1, 1 + \beta)$$

- (a) Bestimmen Sie ein Interpolationspolynom $p(x)$ möglichst geringen Grades in Abhängigkeit von β und geben Sie dieses an.
- (b) Weiter seien folgende Polynome gegeben:

$$q(x) = -\beta x^2 + \beta$$
$$r(x) = -\beta x^2 + (\beta - 1)x$$

Sind die Polynome p, q und r linear abhängig?

Sei nun $\beta = 2$. Tragen Sie den Punkt $W_9 = (p(1); p(3))$ im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 10

Welche Abstände haben die Punkte $Q = (7; 4; 5)$ und $R = (-4; -6; -3)$ von der Ebene

$$\langle x, n \rangle = \langle p, n \rangle \quad \text{mit} \quad p = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

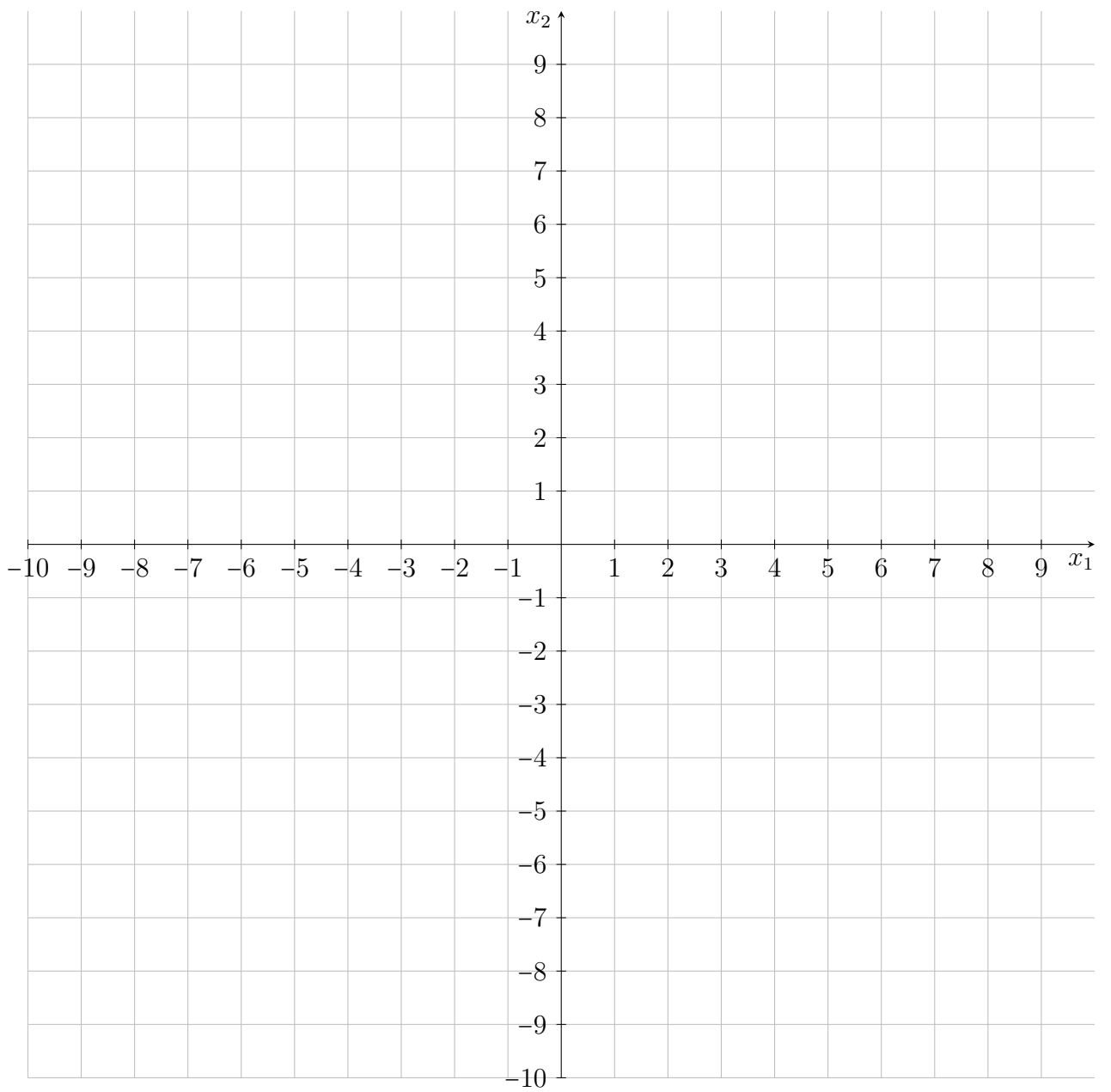
Berechnen Sie aus den Abständen den Punkt $W_{10} = (d_q; \frac{-3d_r}{20})$ und tragen Sie diesen im Koordinatensystem ein.

Aufgabe 11

- (a) Untersuchen Sie die Funktionen $\{1, \sin(x), \sin(2x)\}$ auf lineare Unabhängigkeit im Intervall $[0, 2\pi]$.
- (b) Stellen Sie fest, ob die Menge der Funktionen $\{f(t), g(t), h(t)\} = \{e^t, t, t^2\}$ in $C[0, 2]$ linear unabhängig ist.

Die Teilaufgaben a und b liefern 1 als Ergebnis, wenn die Funktionen linear unabhängig sind, sonst ist das Ergebnis 0. Berechnen Sie draus den Punkt $W_{11} = (a; b)$.

Lösung



Prüfen Sie die folgenden 11 Aussagen, um herauszufinden, in welcher Reihenfolge die Punkte verbunden werden sollen.

- Sei V ein K -Vektorraum mit den Verknüpfungen \oplus, \odot . v und w sind Elemente von V und k ist ein Element des zugehörigen Körpers K . $v \odot w$ ist eindeutig definiert.
Ja: W_8 Nein: W_2
- Ist für den Vektorraum V : $\dim(V)=n$, dann muss die Basis aus genau n Vektoren bestehen.
Ja: W_{10} Nein: W_1
- Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, dann ist die reelle Zahl 0 in jedem Untervektorraum von V enthalten.
Ja: W_7 Nein: W_3
- Es existiert für $n=17$ ein Polynom n -ten Grades mit genau 17 reellen Nullstellen.
Ja: W_7 Nein: W_2
- Seien x, y, z Vektoren aus einem K -Vektorraum. Jede Linearkombination von x, y liegt in $L(x, y, z)$.
Ja: W_8 Nein: W_4
- Falls die beiden Vektoren $(f(3), g(3))$ und $(f(7), g(7))$ linear unabhängig sind, dann sind die Funktionen f und g linear unabhängig.
Ja: W_1 Nein: W_3
- Es sei (G, \circ) eine Gruppe und a Elemente aus G . Gilt für das Neutralelement n immer: $a \circ n = n \circ a$?
Ja: W_9 Nein: W_8
- Jede Basis ist ein Erzeugendensystem.
Ja: W_5 Nein: W_{11}
- Es sei (G, \circ) eine Gruppe und a Elemente aus G . Ist das inverse Element i für alle Elemente a aus G gleich?
Ja: W_1 Nein: W_4
- Falls die beiden Vektoren $(f(3), g(3))$ und $(f(7), g(7))$ linear abhängig sind, dann sind die Funktionen f und g linear abhängig.
Ja: W_{10} Nein: W_6
- Sind (v, w) und (x, y) Basen von V , dann ist auch (v, y) eine Basis.
Ja: W_9 Nein: W_{11}
- Im Vektorraum P_n der Polynome n -ten Grades gilt: $\dim(P_n) = n$.
Ja: W_1 Nein: W_2

Frohe Weihnachten! ☺