Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2023/24

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 10 — 06.12.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \in P_3$. Berechnen Sie die Koordinaten des Polynoms $p(x)$ bezüglich der Basis $B = \{1, (x-1), (x-1)^2, (x-1)^3\}$.

Aufgabe 2

Sind die Polynome

$$f_1(x) = 2x^2 + 3x - 7$$
$$f_2(x) = -3x^2 + x + 4$$
$$f_3(x) = -6x^2 + 13x - 5$$

linear unabhängig?

Aufgabe 3

$M = \{f, g, h, i\}$ sei eine Menge linear unabhängiger Vektoren aus einem Vektorraum V mit $dim(V) \geq 4$. Wie muss α gewählt werden, damit $\{f+g, g+h, h+i, i+\alpha \cdot f\}$ linear unabhängig sind?

Aufgabe 4

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren v_1, v_2, v_3 erzeugte Untervektorraum.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie eine Basis des Untervektorraums U an.

(b) Ergänzen Sie diese Basis des Untervektorraums U zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Der Vektor x habe die Koordinaten $(1,2,3)^T$ bezüglich der kanonischen Basis. Welche Koordinaten hat er bezüglich der Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Zeigen Sie zuerst, dass es sich um eine Basis handelt.

Aufgabe 6

Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Für welche α, β, γ ergibt sich eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionale lineare Hülle $L(a,b,c)$?

Aufgabe 7

Stellen Sie (möglichst einfach) fest, ob folgende Tupel von Vektoren ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis im $\mathbb{R}^n$ bilden. Stellen Sie ggf. fest, ob es eine Teilmenge der Vektoren gibt, die eine Basis bildet. Geben Sie jeweils die Dimension des aufgespannten Unterraums an.

(a) $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$

(b) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

(d) $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Aufgabe 8

Gegeben sei die Basis $B = \{1, x^2, x^4\}$ des Vektorraums V der achsensymmetrischen Polynome maximal 4.Grades.

(a) Zeigen Sie, dass die Lineare Hülle von B einen Untervektorraum vom Vektorraum P_4 der Polynome vom Grad 4 bildet.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Polynome aus V auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{gathered} 3x^4 - 7x^2 + 2 \\ -x^4 + 2x^2 - 1 \\ 4x^4 + 3x^2 + 2 \end{gathered}$$