Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2023/24

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 9 — 29.11.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Form hat die Lineare Hülle der beiden Vektoren? Stellen Sie die Lineare Hülle in Normalenform und in Parameterform dar.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + x \\ f_2(x) &= x^2 - x - 2 \\ f_3(x) &= \alpha \cdot e^x + 1. \end{aligned}$$

Bei welchem α funktioniert das übliche Verfahren zum Beweis der linearen Unabhängigkeit mit den Punkten $x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ nicht? Zeigen Sie anschließend, dass das Verfahren mit eben diesem α und den Punkten x_1, x_2 und $x_4 = 2$ sehr wohl funktioniert.

Aufgabe 4

Schreiben Sie das Polynom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $e_2(t) = 2t^2 - 3t$ und $e_3(t) = t + 3$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren in $C[-\infty, \infty]$ linear unabhängig sind:

(a) $f_1(x) = 6, \quad f_2(x) = 3 \cdot \sin x, \quad f_3(x) = 2 \cdot \cos x$

(b) $f_1(x) = (3-x)^2, \quad f_2(x) = x^2 + 6x, \quad f_3(x) = 5$

(c) $f_1(x) = e^{2x}, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = x$

Aufgabe 6

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils eine Begründung an!

(a) Für jede Menge $E \subset V$, V ist Vektorraum und E Erzeugendensystem, gilt $\exists B \subset E$ sodass B Basis von V.

(b) $\{p_1, p_2, p_3\}$ ist Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, daraus folgt, dass (p_1, p_2) eine Basis der $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ erkennt man immer daran, dass diese gleich viele Nullkomponenten besitzen.

(d) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Falls $a \times b \neq 0$ ist $\{a, b, a \times b\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$.

(e) Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus einem Vektorraum V sind genau dann linear unabhängig, wenn man sie nur trivial zur 0 linear kombinieren kann.

Aufgabe 7

Ziegen Sie, dass die Matrizen linear abhängig sind.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8

Gegeben seien zwei Vektoren $a, \ b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) a und b sind linear unabhängig.

(b) Es existiert ein Indexpaar $i \neq j$ mit $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$.