Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2023/24

Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 8 22.11.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Verifizieren Sie, dass die Menge $\mathbb{R}^+$ aller echt positiven reellen Zahlen mit den Verknüpfungen $x \oplus y := xy$ und $\lambda \odot x := x^\lambda, x, y > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, ein reeller Vektorraum ist.

Aufgabe 2

Gegeben sind zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. Sind U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$?

(a) $U_1 = \{x; x \in \mathbb{R}^3, \det(a, b, x) = 0\}$

(b) $U_2 = \{x; x \in \mathbb{R}^3, \det(a, b, x) = 1\}$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob die Menge

$$S := \{\alpha a + \beta b \quad | \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0,\ a, b \in \mathbb{R}^n\}$$

der Linearkombinationen mit nicht-negativen Vorfaktoren für vorgegebene Vektoren a und b einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ bildet.
Fertigen Sie auch eine Skizze an, die das Ergebnis verdeutlicht, indem Sie (nur für die Skizze) Beispielvektoren für a und b aus dem $\mathbb{R}^2$ wählen.

Aufgabe 4

Bilden Sie eine Gruppe aus nur zwei Elementen 0 und 1. Dabei soll 0 das neutrale Element sein. Welche Ergebnisse müssen die 4 Operationen

$$\begin{array}{ccc} 0 & \circ & 0 \\ 0 & \circ & 1 \\ 1 & \circ & 0 \\ 1 & \circ & 1 \end{array}$$

haben? Begründen Sie die Ergebnisse mit den Gruppenaxiomen.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen keine Vektorräume über $\mathbb{R}$ bilden.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ mit $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(b) $V = \mathbb{R}^3$ mit $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ und

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $V = \{x \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 6

Überprüfen Sie, welche der folgenden Mengen Untervektorräume sind:

(a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}$

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = x_2\}$

(c) $W_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$A := \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \mid a_{i,j} \in \ \mathbb{R} \ \forall \ i = 1, 2, \ j = 1, 2, 3\}$$

mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ einen reellen Vektorraum bilden.