

Übungsblatt 7

15.11.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z &= 8 \\2x - y - 2z &= -1 \\3x + y + \alpha z &= 11\end{aligned}$$

keine eindeutige Lösung? Wie lautet die Lösung für $\alpha = 2$?

Aufgabe 2

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ \beta \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ -2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Variablen α und β derart, dass der aus den 3 Vektoren gebildete Spat das Volumen 17 VE hat und das von den Vektoren a und b aufgespannte Parallelogramm den Flächeninhalt 19 FE hat. Um die Rechnung zu vereinfachen, dürfen Sie annehmen, dass α und β positive Zahlen sind.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie folgende Determinanten. Gehen Sie bei Ihrer Lösung möglichst geschickt vor, um Rechenarbeit zu sparen.

$$(a) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ a & b & c \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 4

Bildet \mathbb{N}_0 mit der Verknüpfung

$$a \circ b = |a - b|$$

eine abelsche Gruppe?

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Vereinfachen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für Determinanten so weit wie möglich:

- (a) $\det(\alpha a, \alpha b, \alpha c)$
- (b) $\det(\alpha a, \beta b, \gamma c)$
- (c) $\det(a, a + b, a + c)$

Aufgabe 6

Auf der Menge der Vektoren im \mathbb{R}^3 ist die folgende Abbildung definiert:

$$a \circ b = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 \\ a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Hat diese Verknüpfung ein neutrales Element?
- (b) Für welche Elemente $a \in \mathbb{R}^3$ hat diese Verknüpfung ein inverses Element?
- (c) Gibt es eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$, die bzgl. dieser Verknüpfung eine (evtl. nicht kommutative) Gruppe bildet?

Aufgabe 7

Zeigen Sie im \mathbb{R}^3 durch Rückführung auf das Spatprodukt und (gegebenenfalls) komponentenweises Ausmultiplizieren:

- (a) **D1.** $\det(a, b, c) = \det(c, a, b) = \det(b, c, a)$
- (b) **D2.** $\det(a, b, c) = -\det(b, a, c)$
- (c) **D3.** $\det(a, a, c) = 0$

Aufgabe 8

Zeigen Sie mithilfe der Determinanten, dass die folgenden 3 Ebenen keinen eindeutigen Schnittpunkt haben und bestimmen Sie anschließend die Schnittmenge.

$$E_1 : x + z = 4, \quad E_2 : 3x - 2y + 2z = 1, \quad E_3 : 2y + z = 11$$