Jacqueline Gottowik, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 2 11.10.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Abstand der Punkte von

(a) $A = (-1; 2)$ und $B = (3; 4)$

(b) $C = (1; 2; 3)$ und $D = (3; -3; 5)$

voneinander.

Aufgabe 2

Weisen Sie nach, ob es sich bei den angegebenen Abbildungen $< x, y >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um Skalarprodukte handelt.

(a) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_1$

(b) $< x, y >= \sum_{i=1}^{3} e^{x_i y_i}$

(c) $< x, y >= 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Aufgabe 3

Es seien $x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{-\sqrt{5}}\right)^T$ und $y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)^T$. Zeigen Sie, dass x und y bezüglich des Skalarprodukts $\langle x, y\rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$ orthogonal sind, bezüglich des Standardskalarprodukts aber nicht.

Aufgabe 4

Gegeben sind die Vektoren $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie die beiden Vektoren x und y derart, dass gilt:

$$a = x + y,$$

wobei $x = \lambda \cdot b$ und $y \perp b$ ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt und $\|\cdot\| = (\langle\cdot,\cdot\rangle)^{1/2}$ die daraus abgeleitete Norm. Welche der folgenden Gleichungen bzw. Aussagen sind für beliebige Vektoren a, b, c richtig? Hierbei sei $a^2 := \langle a, a\rangle$. Beweisen Sie die jeweilige Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel!

(a) $\langle a, b\rangle\langle b, a\rangle = 2\langle b, a\rangle$ (b) $\langle a, c\rangle a = a^2 c$

(c) $b = \sqrt{b^2}$ (d) $\langle a + b, a - b\rangle = a^2 - b^2$ (e) $\frac{\langle a, b\rangle}{\langle b, b\rangle} b = a$

(f) $\langle a, b\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$ oder $b = 0$

Aufgabe 6

Welcher Punkt hat von den Punkten $A = (0, 1)$, $B = (0, 7)$ und $C = (4, 9)$ den gleichen Abstand? Tipp: P sei der gesuchte Punkt. Es muss für die zugehörigen Ortsvektoren gelten:

$$\|p - a\| = \|p - b\| = \|p - c\|$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass durch $\langle u, v\rangle = u_1 v_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_4 v_4$ für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird

Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren a und b und für ein beliebiges Skalarprodukt mit der daraus induzierten Norm gilt:

(a) $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b\rangle$

(b) $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

(c) $\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 = 4\langle a, b\rangle$