

## Übungsblatt 2

11.10.2023

### Selbstlernaufgaben

#### Aufgabe 1

Berechnen Sie den Abstand der Punkte von

(a)  $A = (-1; 2)$  und  $B = (3; 4)$

(b)  $C = (1; 2; 3)$  und  $D = (3; -3; 5)$

voneinander.

#### Aufgabe 2

Weisen Sie nach, ob es sich bei den angegebenen Abbildungen  $\langle x, y \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  um Skalarprodukte handelt.

(a)  $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_1$

(b)  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 e^{x_iy_i}$

(c)  $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

#### Aufgabe 3

Es seien  $x = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{-\sqrt{5}}\right)^T$  und  $y = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)^T$ . Zeigen Sie, dass  $x$  und  $y$  bezüglich des Skalarprodukts  $\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$  orthogonal sind, bezüglich des Standardskalarprodukts aber nicht.

#### Aufgabe 4

Gegeben sind die Vektoren  $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$  und  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

Bestimmen Sie die beiden Vektoren  $x$  und  $y$  derart, dass gilt:

$$a = x + y,$$

wobei  $x = \lambda \cdot b$  und  $y \perp b$  ist.

## Hausaufgaben

### Aufgabe 5

Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein beliebiges Skalarprodukt und  $\|\cdot\| = (\langle \cdot, \cdot \rangle)^{1/2}$  die daraus abgeleitete Norm. Welche der folgenden Gleichungen bzw. Aussagen sind für beliebige Vektoren  $a, b, c$  richtig? Hierbei sei  $a^2 := \langle a, a \rangle$ . Beweisen Sie die jeweilige Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel!

- (a)  $\langle a, b \rangle \langle b, a \rangle = 2 \langle b, a \rangle$                       (b)  $\langle a, c \rangle a = a^2 c$   
(c)  $b = \sqrt{b^2}$                       (d)  $\langle a + b, a - b \rangle = a^2 - b^2$                       (e)  $\frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} b = a$   
(f)  $\langle a, b \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$  oder  $b = 0$

### Aufgabe 6

Welcher Punkt hat von den Punkten  $A = (0, 1)$ ,  $B = (0, 7)$  und  $C = (4, 9)$  den gleichen Abstand? Tipp:  $P$  sei der gesuchte Punkt. Es muss für die zugehörigen Ortsvektoren gelten:

$$\|p - a\| = \|p - b\| = \|p - c\|$$

### Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass durch  $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_3 - u_3 v_2 + u_4 v_4$  für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird

### Aufgabe 8

Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren  $a$  und  $b$  gilt:

- (a)  $\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2 \langle a, b \rangle$   
(b)  $\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$   
(c)  $\|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 = 4 \langle a, b \rangle$