Übungsblatt 7 - Repetitorium 02.05.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bearbeiten Sie das Ilias-Quiz mit dem Namen "Übungsblatt 7 Aufgabe 1"!

Aufgabe 2

Bearbeiten Sie das Ilias-Quiz mit dem Namen "Übungsblatt 7 Aufgabe 2"!

Aufgabe 3

Es sei P^n der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Gegeben seien folgende Abbildungen: $f : P_1 \to P_1$ mit $f(p(x)) = p(x) - p(-x)$ sowie $g : P_1 \to P_2$ mit $g(p(x)) = p(x^2)$.

(a) Zeigen Sie: f und g sind linear.

(b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der zusammengesetzten linearen Abbildung $g \circ f$ bezüglich der Monombasis.

(c) Bestimmen Sie den Kern und das Bild sowie deren Dimensionen von der zusammengesetzten Abbildung.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -2 & 1 \\ -17 & 9 & -6 & 117 \\ 4 & 2 & -8 & 38 \\ 3 & 17 & 34 & -217 \end{pmatrix}$$

unter der Annahme, dass die Determinanten der folgenden Matrizen bekannt sind,

$$B = \begin{pmatrix} 17 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 38 & -4 & 3 \\ -17 & 117 & -3 & 4 \\ 3 & -217 & 17 & 17 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 17 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 & 38 \\ -17 & 5 & -3 & 117 \\ 3 & 0 & 17 & -217 \end{pmatrix}$$

wobei $\det(B) = x$ und $\det(C) = y$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Wir betrachten die *Projektion* p von $x \in \mathbb{R}^n$ in Richtung v (vgl. Lineare Algebra 1). Es gilt $p = \frac{\langle v,x\rangle}{||v||^2}v$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und $|| \cdot ||$ die euklidische Norm bezeichne.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $P(x) = p$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie die zugehörige Abbildungsmatrix A.

(c) Berechnen Sie Bild(P) und geben Sie eine Basis des Bildes an. Vermeiden Sie dabei umfangreiche Rechnungen! Wie lautet rg(A)?

(d) Bestimmen Sie Ker(P) und deuten Sie Ker(P) geometrisch.

(e) Geben Sie eine Basis von Ker(P) an! Tipp: Erinnern Sie sich an die Umrechnung der verschiedenen Ebenendarstellungen ineinander!

(f) Zeigen Sie, dass P keine Umkehrabbildung besitzt.

Aufgabe 6

Gilt die Beziehung

$$det(A+B) = det(A) + det(B)?$$

Beweisen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 7

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie die Matrix A auf obere Dreiecksgestalt, indem Sie sie von links mit den für die Zeilenumformungen erforderlichen Elementarmatrizen multiplizieren.

(b) Multiplizieren Sie auch die rechte Seite b von links mit diesen Elementarmatrizen.

(c) Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem durch Rückwärtssubstitution.