Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 2, SS 2023

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 6 24./25.04.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Die Determinante der folgenden Matrix A_1 ist:

$$\det(A_1) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = d.$$

Berechnen Sie mit Hilfe von $\det(A_1)$ die Determinaten der folgenden Matrizen in Abhängigkeit von $c, d \in \mathbb{R}$:

(a) $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ c \cdot a_{31} & c \cdot a_{32} & c \cdot a_{33} & c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(b) $A_3 = c \cdot \begin{pmatrix} a_{11} + a_{41} & a_{12} + a_{42} & a_{13} + a_{43} & a_{14} + a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(c) $A_4 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(d) $A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} + c \cdot a_{12} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + c \cdot a_{22} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + c \cdot a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + c \cdot a_{42} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

(e) $A_6 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} + c \cdot a_{31} & a_{12} + c \cdot a_{32} & a_{13} + c \cdot a_{33} & a_{14} + c \cdot a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Die Kavalierprojektion dient dazu, dreidimensionale Objekte zweidimensional darzustellen. Die zugehörige Projektionsmatrix bzgl. der kanonischen Basen A und B lautet

$$M_B^A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren $\{a'_1, a'_2, a'_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ spannen einen Spat auf und bilden die Basis A'.

(a) Zeichnen Sie den Spat.

(b) Bestimmen Sie alle acht Eckpunkte des Spates sowie dessen Volumen.

(c) Projizieren Sie alle Eckpunkte des Spates mit Hilfe der Kavalierprojektion in die $\mathbb{R}^2$-Ebene.

(d) Neben der kanonischen Basis B gibt es im $\mathbb{R}^2$ auch noch die Basis $B' = \{b'_1, b'_2\}$ mit

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{B'}^{A'}$ bzgl. der Basen A' und B'.

Aufgabe 3

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie Elementarmatrizen M_1 und M_2 mit $M_1 M_2 A = E$.

(b) Stellen Sie A^{-1} als Produkt zweier Elementarmatrizen dar.

(c) Schreiben Sie A als Produkt von zwei Elementarmatrizen.

Aufgabe 4

Selbstlernphase zum Thema Eigenschaften der Determinante:
Lesen und verstehen Sie den Beweis zum Satz 5.15 im Skript und erklären Sie, warum L_B nur dann vollen Rang besitzen kann, falls alle Hauptdiagonalelemente von B ungleich 0 sind.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Der Konzern MATSE Chemicals stellt seine Umsätze aus den Sparten Kunststoffe, Petrochemie und Organische Chemie mit Hilfe des Vektors $x = (x_K, x_P, x_O)^T$ dar. Der Vektor $y = (y_E, y_A)^T$ gibt die Einnahmen und Ausgaben des Gesamtkonzern in Mio. EUR wieder und berechnet sich nach derzeitigem Stand wie folgt:

- Die Einnahmen ergeben sich als Summe der Umsätze der einzelnen Sparten.
- Die Ausgaben belaufen sich auf 95% der Umsätze aus dem Kunststoffbereich plus 90% der Umsätze aus dem Bereich Petrochemie plus 85% der Umsätze aus dem Bereich der Organischen Chemie.

(a) Stellen Sie den Vektor y als Lineare Abbildung des Vektors x dar, indem Sie die zugehörige Abbildungsmatrix M_y^x aufstellen.

Die Sparte Petrochemie soll nun aufgelöst werden und zu 80% in die Sparte Kunststoffe sowie 20% in Organische Chemie eingegliedert werden.

(b) Stellen Sie die Umsätze $x' = (x'_K, x'_O)^T$ der Sparten Kunststoffe und Organische Chemie nach Umgliederung des Konzerns allgemein dar, indem Sie die Transformationsmatrix $T_{x'}^x$ für die Transformation von x nach x' berechnen.

(c) Begründen Sie inhaltlich sowie mathematisch, warum Sie die Abbildungsmatrix $M_y^{x'}$ zur Bestimmung der Einnahmen und Ausgaben nach der neuen Konzernstruktur nicht allgemein aufstellen können.

(d) Geben Sie ein sinnvolles Beispiel an, wie $M_y^{x'}$ aussehen könnte.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Matrizen sind Elementarmatrizen? Geben Sie die Zeilenoperationen an, die einer Multiplikation von links mit den folgenden Matrizen entsprechen.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

Es sei $S(x)$ eine Spiegelung an der Ebene $< n, x >= 0$ mit $||n|| = 1$.
Dann gilt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, S(x) = x - 2 < x, n > n$.

(a) Bezüglich der Einheitsmatrix im Definitions- und Wertebereich, zeigen Sie: $S(x) = M \cdot x$ mit $M = E - 2 \cdot n \cdot n^T$. E bezeichnet die Einheitsmatrix.
Hinweis: Allgemein gilt für $x \in \mathbb{R}^3 : E \cdot x = x$.

(b) Bestimmen Sie für $n = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die zu M inverse Matrix M^{-1}.

(c) Bestimmen Sie die Matrix B^{-1}, mit welcher Koordinaten bezüglich der Standardbasis in Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ umgerechnet werden.

(d) Bestimmen Sie nun die Matrix M^{-1} bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ im Definitions- und Wertebereich.