Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2022/23

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki Aachen

Übungsblatt 13 11.01.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bilden die 3 Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$? Bilden Sie daraus gegebenenfalls eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 2

Betrachten Sie $C[0,\pi]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) g(x)\, dx$$

und $f_n(x) = \cos(nx)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Zeigen Sie, dass f_k und f_l für $k \neq l$ orthogonal sind.

Hinweis:

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \dfrac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}; & |a| \neq |b| \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4a}\sin(2ax) \qquad ; & a = b \end{cases}$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie auf P_2 das Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx$$

Konstruieren Sie aus der Basis $\{1, x, x^2\}$ eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 4

Geben Sie zwei linear unabhängige Vektoren b, c an, die senkrecht auf dem Vektor $a = (-2, 1, 2, -3)^T$ stehen. Orthonormieren Sie die drei Vektoren a, b und c.

Freiwillige Hausaufgaben (keine Abgabe!)

Aufgabe 5

$v_1, \ldots, v_n$ mit $v_i \neq 0$ seien n paarweise orthogonale Vektoren, d.h.

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \qquad \forall\, i \neq j.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren linear unabhängig sind.

Tipp: Klären Sie zunächst, was passiert, wenn man eine Linearkombination

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

skalar mit einem v_k für $1 \leq k \leq n$ multipliziert.

Aufgabe 6

(a) Zeigen Sie, dass mit dem Standardskalarprodukt die folgenden Vektoren jeweils eine Orthonormalbasis bilden

$$v_1 = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -sin(t) \\ cos(t) \end{pmatrix}, \text{mit } t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} cos(t) \\ sin(t) \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} sin(t) \\ -cos(t) \end{pmatrix}, \text{mit } t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ von der Form (1) oder (2) ist.

Aufgabe 7

Geben Sie eine orthonormale Basis des Unterraums W von $\mathbb{C}^3$ an, der durch

$$v_1 = (1; i; 0)^T \quad \text{und} \quad v_2 = (1; 2; 1 - i)^T$$

aufgespannt wird. Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren.

Hinweis: $< z, w >= z \cdot \bar{w}$