Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 12 — 04.01.2023

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Vektorraum V und eine Menge M von Vektoren aus V. Untersuchen Sie die Eigenschaften „Lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus M“, „M bildet eine Basis“, „M bildet ein Erzeugendensystem“ und „M bildet ein minimales Erzeugendensystem“:

(a) Welche Eigenschaften implizieren die jeweils anderen:

		impliziert die Eigenschaft				
	Eigenschaften	lin. unabh.	Basis	ES	OGB	ONS
gegeben	linear unabhängig					
	Basis					
	Erzeugendensystem (ES)					
	Orthogonalbasis (OGB)					
	Orthonormalsystem (ONS)					

(b) Finden Sie zu jeder der obigen Eigenschaften ein einfaches Beispiel, das nur die Eigenschaft selbst und die damit implizierten Eigenschaften erfüllt, alle anderen jedoch nicht.

Aufgabe 2

Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -5 \\ \alpha \\ -1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wie müssen die reellen Parameter α und β gewählt werden, damit die Vektoren a, b und c ein Orthogonalsystem bilden? Bestimmen Sie für diesen Fall die orthogonale Projektion des Vektors v auf den durch die Vektoren a, b und c aufgespannten Unterraum!

Aufgabe 3

Es sei W der Unterraum des $\mathbb{R}^5$, der durch $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^{\perp}$ von W an.

Aufgabe 4

Sei W die lineare Hülle der Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

W ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^3$. Das orthogonale Komplement zu W ist $W^{\perp}$. Schreiben Sie

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

als Summe $w = (w_1 + w_2)$ mit $w_1 \in W$ und $w_2 \in W^{\perp}$.

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Schauen Sie sich folgende Videoausschnitte zu Kapitel 3 des Skriptes, welche Sie im Ilias unter "Vorlesungsvideos → Kapitel 3 - Algebraische Strukturen" finden, an:

- Kap_3.8_Teil1.mp4
- Kap_3.8_Teil2.mp4
- Kap_3.8_Teil3.mp4

Bearbeiten Sie dazu das Ilias-Quiz für diese Woche!

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Bestapproximation des Punktes $V = (2, 3, 1)$ auf die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene. Klären Sie zunächst, wie die Bestapproximation in der analytischen Geometrie genannt wird. Nutzen Sie bei der Berechnung die orthogonale Projektion auf Unterräume. Bestimmen Sie auch den minimalen Abstand von V zur Ebene.

Aufgabe 7

Gegeben Sei ein Vektorraum V. U und W seien Untervektorräume von V. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) $U = (U^\perp)^\perp$

(b) $U \subset W \Rightarrow W^\perp \subset U^\perp$

(c) $W^\perp \subset U^\perp \Rightarrow U \subset W$

Aufgabe 8

Folgende Vektoren spannen einen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ auf:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Bestimmen Sie aus V eine Orthonormalbasis von U, falls dies möglich ist.

(b) Welche Dimension hat das orthogonale Komplement $U^\perp$?