Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2022/23

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 9 — 30.11.2022

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die lineare Hülle der Vektoren $u = (1; 2; 3)$, $v = (0; 1; 2)$ und $w = (0; 0; 1)$ der $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Geben Sie jeweils eine Begründung an!

(a) Für jede Menge $E \subset V$, V ist Vektorraum und E Erzeugendensystem, gilt $\exists B \subset E$ sodass B Basis von V.

(b) $\{p_1, p_2, p_3\}$ ist Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, daraus folgt, dass (p_1, p_2) eine Basis der $\mathbb{R}^2$ ist.

(c) Die lineare Unabhängigkeit zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ erkennt man immer daran, dass diese gleich viele Nullkomponenten besitzen.

(d) Es seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Falls $a \times b \neq 0$ ist $\{a, b, a \times b\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$

(e) Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus einem Vektorraum V sind genau dann linear unabhängig, wenn man sie nur trivial zur 0 linear kombinieren kann.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + x \\ f_2(x) &= x^2 - x - 2 \\ f_3(x) &= \alpha \cdot e^x + 1. \end{aligned}$$

Bei welchem α funktioniert das übliche Verfahren zum Beweis der linearen Unabhängigkeit mit den Punkten $x_1 = 0, x_2 = 1$ und $x_3 = -1$ nicht? Zeigen Sie anschließend, dass das Verfahren mit eben diesem α und den Punkten x_1, x_2 und $x_4 = 2$ sehr wohl funktioniert.

Aufgabe 4

Gegeben seien zwei Vektoren $a,\ b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) a und b sind linear unabhängig

(b) es existiert ein Indexpaar $i \neq j$ mit $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Bearbeiten Sie das Ilias-Quiz für diese Woche.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ linear abhängig oder unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7

$x_1, ..., x_n$ seien linear unabhängige Vektoren aus einem K-Vektorraum V. Weiter sei $x = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$ und $\mu_i \in K$ für alle $i = 1, ..., n$. Es ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^n \mu_i \neq 1$ die Vektoren $x - x_1, ..., x - x_n$ linear unabhängig sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

Betrachten sie die Gleichung

$$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x - x_i) \tag{1}$$

(a)
- Zeigen Sie, dass für alle $i = 1, ..., n$ gilt: $\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j\right) \mu_i = \lambda_i$
- Folgern Sie daraus, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ gelten muss (Summe über alle i bilden).

(b)
- Zeigen Sie, dass aus $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ und der Gleichung (1) folgt, dass $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.
- Zeigen Sie schließlich, dass die Vektoren linear unabhängig sein müssen.

Aufgabe 8

Schreiben Sie das Polynom $v(t) = t^2 + 4t - 3$ auf $\mathbb{R}$ als eine Linearkombination der Polynome $e_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $e_2(t) = 2t^2 - 3t$ und $e_3(t) = t + 3$.