Aufgaben zur Veranstaltung
Lineare Algebra 1, WS 2022/23

Benno Wienke, Daniel Weinholz, Leo Kerojoki — Aachen

Übungsblatt 6 — 09.11.2022

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Ebenen

(a) $3x + 4z = 7$ und $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $-6x - 6y - 3z = 1$

Aufgabe 2

Typische IHK-Aufgabe. Eine Mobilfunkantenne muss wegen der stürmischen Lage auf einem Berg mit Seilen stabilisiert werden. Die Spitze der Antenne hat die Koordinaten

$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1,5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die Seile werden an den Punkten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

befestigt.

(a) Berechnen Sie die Ebene, in der die Punkte A, B, C liegen, in Hessescher Normalform.

(b) Der Fuß der Mobilfunkantenne liegt in der gleichen Ebene wie die Endpunkte der Seile. Die Antenne steht genau in z-Richtung. Bestimmen Sie die Höhe der Antenne (1 LE $=$ 10 m).

Aufgabe 3

In welchem Punkt schneidet die Gerade durch die Punkte $P = (1; 1; 1)$ und $Q = (1; 2; 3)$ die (x_1, x_2)-Ebene? Berechnen Sie auch den Winkel.
Welche Ebene senkrecht zur Geraden verläuft durch den Nullpunkt?

Aufgabe 4

Durch 4 Punkte A, B, C und D ist ein beliebiges Viereck gegeben. Zeigen Sie: Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$, dann sind diese Strecken parallel (Skizze!). (Dies gilt auch, wenn A, B, C und D im $\mathbb{R}^3$ und auch nicht in einer Ebene liegen.)

Hausaufgaben

Aufgabe 5

Gegeben sind die folgenden Geraden in der Parameterdarstellung:

$$\begin{array}{lll} g_1: & x = 1 + t; & y = 3 - 2 \cdot t \\ g_2: & x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot t; & y = 1 - 4 \cdot t \end{array}$$

Geben Sie die jeweiligen Normalform und Hesse-Normalform an. Gibt es einen Schnittpunkt?

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob die folgenden Ebenen einen eindeutigen Schnittpunkt im $\mathbb{R}^3$ besitzen:

(a)

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$E_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$E_3 : x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Für welche Werte $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade

$$g : x = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

parallel zur Ebene

$$E : 2x - y + t \cdot z = 9, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 8

Gegeben sind die zwei Punkte $P = (1; 2; 3)$ und $Q = (-1; 1; 2)$ und die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g_1 bzw. g_2 durch den Punkt P in Richtung von a bzw. durch Q in Richtung von b.

(b) Sind die Geraden windschief (d.h. sind sie weder parallel noch haben sie einen Schnittpunkt)?

(c) Falls das der Fall ist, bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf beiden Geraden steht.