

Übungsblatt 2

12.10.2022

Selbstlernaufgaben

Aufgabe 1

Welche der folgenden Gleichungen bzw. Aussagen sind für beliebige Vektoren und beliebige Skalarprodukte richtig? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) $a \cdot \langle a, c \rangle = a^2 \cdot c$

(b) $b = \sqrt{b^2}$

(c) $\langle a + b, a - b \rangle = a^2 - b^2$

(d) $\frac{\langle a, b \rangle}{\langle b, b \rangle} \cdot b = a$

(e) $\langle a, b \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$

(f) $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a \cdot x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{a} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Abstand der Punkte von

(a) $A = (-1; 2)$ und $B = (3; 4)$

(b) $C = (1; 2; 3)$ und $D = (3; -3; 5)$

voneinander.

Aufgabe 3

Weisen sie nach, ob es sich bei den angegebenen Abbildungen $\langle x, y \rangle: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ um Skalarprodukte handelt?

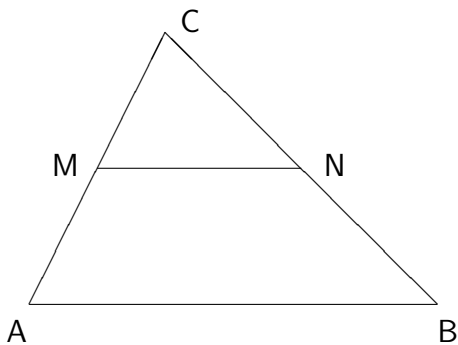
(a) $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_1$

(b) $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 e^{x_i y_i}$

(c) $\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

Aufgabe 4

In einem Dreieck ABC sind M und N die Mittelpunkte der Seiten \overline{AC} und \overline{BC} (siehe Zeichnung). Zeigen Sie: Die Strecke \overline{MN} ist parallel zur Dreiecksseite \overline{AB} und halb so lang wie diese.



Hausaufgaben

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass für beliebige Vektoren a und b gilt:

$$(a) \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\langle a, b \rangle$$

$$(b) \|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

$$(c) \|a + b\|^2 - \|a - b\|^2 = 4\langle a, b \rangle$$

Aufgabe 6

Welcher Punkt hat von den Punkten $A = (0, 1)$, $B = (0, 7)$ und $C = (4, 9)$ den gleichen Abstand? Tipp: P sei der gesuchte Punkt. Es muss für die zugehörigen Ortsvektoren gelten:

$$\|p - a\| = \|p - b\| = \|p - c\|$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass durch $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_3 - u_3v_2 + u_4v_4$ für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

kein Skalarprodukt definiert wird

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

$$\begin{aligned} 1x_1 - 4x_2 + 9x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - 12x_3 &= 2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (Keine Abgabe!)

Schauen Sie sich das Video zu Kapitel 1.2 des Skriptes an. Sie finden das Video im ILIAS unter "Vorlesungsvideos → Kapitel 1 - Motivation und Vorbereitung". Kapitel 1.2 ist Bestandteil des Videos "Kap.1.1.mp4" und beginnt dort ab Zeitpunkt 14:20 min.